

1 以下の各問いにそれぞれ答えよ。

問 1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき,  
 $A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$  を求めよ。

問 2. 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり, 1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則: 点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに,  
 等しい確率で移動する。

このとき,  $n$  秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

2 3 次関数  $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$  のグラフ上の点  $(1, 0)$  における接線を  $l$  とする。この 3 次関数のグラフと接線  $l$  で囲まれた部分を  $x$  軸の周りに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。

3  $p$  を 3 以上の素数とする。4 個の整数  $a, b, c, d$  が次の 3 条件  
 $a + b + c + d = 0$ ,  $ad - bc + p = 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$   
 を満たすとき,  $a, b, c, d$  を  $p$  を用いて表せ。

- 4 座標空間で点  $(3, 4, 0)$  を通りベクトル  $\vec{a} = (1, 1, 1)$  に平行な直線を  $l$ , 点  $(2, -1, 0)$  を通りベクトル  $\vec{b} = (1, -2, 0)$  に平行な直線を  $m$  とする。点  $P$  は直線  $l$  上を, 点  $Q$  は直線  $m$  上をそれぞれ勝手に動くとき, 線分  $PQ$  の長さの最小値を求めよ。

- 5  $n$  を 1 以上の整数とするとき, 次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは説明し, 正しくないときはその理由を述べよ。

命題  $p$ : ある  $n$  に対して,  $\sqrt{n}$  と  $\sqrt{n+1}$  は共に有理数である。

命題  $q$ : すべての  $n$  に対して,  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  は無理数である。