

1 次の各問いにそれぞれ答えよ。

問1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき,
 $A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$ を求めよ。

問2. 得点 $1, 2, \dots, n$ が等しい確率で得られるゲームを独立に3回繰り返す。
このとき、2回目の得点が1回目の得点以上であり、さらに3回目の得点が
2回目の得点以上となる確率を求めよ。

2 x, y を相異なる正の実数とする。数列 a_n を

$$a_1 = 0, a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の
点 (x, y) の範囲を図示せよ。

3 p を3以上の素数とする。4個の整数 a, b, c, d が次の3条件

$$a + b + c + d = 0, ad - bc + p = 0, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$$

を満たすとき、 a, b, c, d を p を用いて表せ。

4 ABC において， $\angle A$ の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を A' とする。同様に $\angle B$ ， $\angle C$ の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ点を B' ， C' とする。このとき， 3 直線 AA' ， BB' ， CC' は 1 点 H で交わり， この点 H は三角形 $A'B'C'$ の垂心と一致することを証明せよ。

5 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。座標平面上で原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転する 1 次変換を f とし， 直線 $y = (\tan \alpha)x$ について対称移動する 1 次変換を g とする。合成変換 $f \circ g$ が x 軸について対称移動する 1 次変換と一致するとき， α の値を求めよ。

6 $y = xe^{1-x}$ と $y = x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。