

1 以下の各問いにそれぞれ答えよ。

問 1. 定積分  $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$  を求めよ。

問 2. 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

2  $x, y$  を相異なる正の実数とする。数列  $a_n$  を

$$a_1 = 0, a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  が有限の値に収束するような座標平面上の点  $(x, y)$  の範囲を図示せよ。

3  $p$  を 3 以上の素数とする。4 個の整数  $a, b, c, d$  が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, ad - bc + p = 0, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$$

を満たすとき、 $a, b, c, d$  を  $p$  を用いて表せ。

- 4 点  $O$  を中心とする円に内接する  $ABC$  の 3 辺  $AB, BC, CA$  をそれぞれ  $2:3$  に内分する点を  $P, Q, R$  とする。  $PQR$  の外心が点  $O$  と一致するとき、  $ABC$  はどのような三角形か。

- 5  $A$  を 2 次の正方行列とする。列ベクトル  $\vec{x}_0$  に対し、列ベクトル  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$  を 
$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
 によって定める。ある零ベクトルではない  $\vec{x}_0$  について、3 以上の自然数  $m$  で初めて  $\vec{x}_m$  が  $\vec{x}_0$  と一致するとき、行列  $A^m$  は単位行列であることを示せ。

- 6 すべての実数で定義され何回でも微分できる関数  $f(x)$  が  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  を満たし、さらに任意の実数  $a, b$  に対して  $1 + f(a)f(b) \neq 0$  であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている。

- (1) 任意の実数  $a$  に対して、 $-1 < f(a) < 1$  であることを証明せよ。
- (2)  $y = f(x)$  のグラフは  $x > 0$  で上に凸であることを証明せよ。