2007 年度　東京大学前期入試問題理系　　2007.2.25 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$　n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

$\boxed{\mathbf{2}}$　n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ があり，次の 2 つの条件を満たしている。

①　$\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}(1 \leqq k \leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1(2 \leqq k \leqq n)$

②　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$　座標平面上の 2 点 P，Q が，曲線 $y = x^2(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときは R = P とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 A，P，Q が，5 つの条件 $A = aP + (a+1)Q$，$P^2 = P$，$Q^2 = Q$，$PQ = O$，$QP = O$ を満たすとする。ただし，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，$(P+Q)A = A$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1) の 5 つの条件をすべて満たす行列 P，Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし，$2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0 < p < 1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール **(R)** の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
- ① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
- ② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1) で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール **(R)** の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x，a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t}\,dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

(2) (1) を利用して，次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。