$\boxed{1}$ (1) $2x^2-x-1$ で割ると，商が $4x+5$，余りが $-2x+1$ である多項式 A を求めよ。

(2) $x^4+3x^3+2x^2-1$ を多項式 B で割ると，商が x^2+1，余りが $-3x-2$ である。多項式 B を求めよ。

(1) 与えられた条件から，等式

$$A=(2x^2-x-1)\times(4x+5)-2x+1$$

が成り立つ。

ゆえに　$A=8x^3+6x^2-9x-5-2x+1=8x^3+6x^2-11x-4$

(2) 与えられた条件から，等式

$$x^4+3x^3+2x^2-1=B\times(x^2+1)-3x-2$$

が成り立つ。

ゆえに　$x^4+3x^3+2x^2-1-(-3x-2)=B\times(x^2+1)$

すなわち　$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=B\times(x^2+1)$

よって，$x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ を x^2+1 で割ると

商　x^2+3x+1，余り　0

であるから　$B=x^2+3x+1$

$\boxed{2}$ 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}-\dfrac{x}{x^2-9}$　　(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

(3) $\dfrac{1}{(x-1)x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

(1) $(\text{与式})=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)}-\dfrac{x}{(x+3)(x-3)}$

$$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)(x-3)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)-x(x-1)}{(x-1)(x+3)(x-3)}=\frac{-(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$

$$=-\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

(2) $1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1-x-1}{1-x}=-\dfrac{x}{1-x}$

よって　$(\text{与式})=1-\dfrac{1}{-\dfrac{x}{1-x}}=1+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x+1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

(3) $(\text{与式})=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

$\boxed{3}$ 次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $6\{x^2+(2x+1)^2+y^2\}-(5x+2-y)^2=a(x+y)^2+b(x+y)+c$

(2) $x^2+xy-12y^2-3x+23y+a=(x-3y+b)(x+4y+c)$

(1) 与式の両辺を展開して整理すると

$$6(x^2+4x^2+4x+1+y^2)-(25x^2+4+y^2+20x-4y-10xy)$$
$$=a(x^2+2xy+y^2)+b(x+y)+c$$

よって　$5x^2+10xy+5y^2+4x+4y+2=ax^2+2axy+ay^2+bx+by+c$

これが x，y についての恒等式である条件は　$a=5$，$b=4$，$c=2$

別解　与式の左辺を展開して整理すると　$5x^2+10xy+5y^2+4x+4y+2$

ゆえに　$5(x+y)^2+4(x+y)+2=a(x+y)^2+b(x+y)+c$

これは $x+y$ についての恒等式であるから　$a=5$，$b=4$，$c=2$

(2) 与式の右辺を展開して整理すると

$$x^2+xy-12y^2-3x+23y+a=x^2+xy-12y^2+(b+c)x+(4b-3c)y+bc$$

これが x，y についての恒等式である条件は　$b+c=-3$，$4b-3c=23$，$a=bc$

前の2式から　$b=2$，$c=-5$　　ゆえに　$a=2\cdot(-5)=-10$

すなわち　$a=-10$，$b=2$，$c=-5$

$\boxed{4}$ (1) $x=3+\sqrt{5}$ のとき，x^2-6x+ $^{ア}\boxed{}$ $=0$ である。また，このとき，x^3-5x^2-2x+8 の値は $^{イ}\boxed{}$ となる。

(2) 2次方程式 $x^2+4x-3=0$ の大きい方の解を α とするとき，$\alpha^3+2\alpha^2-10\alpha$ の値を求めよ。

(1) $x=3+\sqrt{5}$ から　$x-3=\sqrt{5}$

両辺を平方すると　$(x-3)^2=5$

よって　$x^2-6x+4=0$

また，右の計算から

$x^3-5x^2-2x+8=(x^2-6x+4)(x+1)+4$

$x=3+\sqrt{5}$ のとき $x^2-6x+4=0$ であるから

$x^3-5x^2-2x+8=4$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-6x+4 & x^3-5x^2-2x+8 \\ & x^3-6x^2+4x \\ \hline & x^2-6x+8 \\ & x^2-6x+4 \\ \hline & 4 \end{array}$$

(2) $x^2+4x-3=0$ の解は

$x=-2\pm\sqrt{7}$

よって　$\alpha=-2+\sqrt{7}$

右の計算と $\alpha^2+4\alpha-3=0$ から

$\alpha^3+2\alpha^2-10\alpha$

$=(\alpha^2+4\alpha-3)(\alpha-2)+\alpha-6$

$=-2+\sqrt{7}-6=-8+\sqrt{7}$

$$\begin{array}{r|l} & \alpha-2 \\ \hline \alpha^2+4\alpha-3 & \alpha^3+2\alpha^2-10\alpha \\ & \alpha^3+4\alpha^2-3\alpha \\ \hline & -2\alpha^2-7\alpha \\ & -2\alpha^2-8\alpha+6 \\ \hline & \alpha-6 \end{array}$$

数学Ⅰ＋A　演習問題⑪　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

5　3点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ がある。

(1)　線分 AB を $3:2$ に内分する点を P，$3:2$ に外分する点を Q とするとき，線分 PQ を $2:3$ に内分する点 R の座標を求めよ。

(2)　△ABC の重心 G の座標を求めよ。

(3)　△PQS の重心が (2) の点 G と一致するように点 S の座標を定めよ。

(1)　P の座標は $\left(\dfrac{2\cdot 5+3\cdot 0}{3+2},\ \dfrac{2\cdot 4+3\cdot(-1)}{3+2}\right)$ から　$(2,\ 1)$

Q の座標は $\left(\dfrac{(-2)\cdot 5+3\cdot 0}{3+(-2)},\ \dfrac{(-2)\cdot 4+3\cdot(-1)}{3+(-2)}\right)$ から　$(-10,\ -11)$

よって，線分 PQ を $2:3$ に内分する点 R の座標は

$\left(\dfrac{3\cdot 2+2\cdot(-10)}{2+3},\ \dfrac{3\cdot 1+2\cdot(-11)}{2+3}\right)$ から　$\left(-\dfrac{14}{5},\ -\dfrac{19}{5}\right)$

(2)　G の座標は $\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ から　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(3)　S$(x,\ y)$ とすると，△PQS の重心の座標は，(1) から

$\left(\dfrac{2+(-10)+x}{3},\ \dfrac{1+(-11)+y}{3}\right)$　∴　$\left(\dfrac{x-8}{3},\ \dfrac{y-10}{3}\right)$

これが (2) の点 G と一致するとき　$\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{13}{3}$，$\dfrac{y-10}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって　$x=21$，$y=11$　すなわち　$(21,\ 11)$

6　(1)　2点 A$(1,\ -2)$，B$(-3,\ 4)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

(2)　3点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(a,\ b)$ について，△ABC が正三角形であるとき，a，b の値を求めよ。

(1)　求める点は x 軸上の点であるから，P$(a,\ 0)$ とおける。

PA＝PB　すなわち　PA^2＝PB^2 であるから

$(1-a)^2+(-2-0)^2=(-3-a)^2+(4-0)^2$

ゆえに　$8a=-20$　から　$a=-\dfrac{5}{2}$　よって　P$\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

(2)　正三角形の条件 AB＝BC＝CA から　AB^2＝BC^2＝CA^2

∴　$(0-4)^2+(2-0)^2=(a-0)^2+(b-2)^2=(4-a)^2+(0-b)^2$

すなわち　$20=a^2+b^2-4b+4=16-8a+a^2+b^2$

ゆえに　$b=2a-3$　……①，$a^2+b^2-4b-16=0$　……②

① を ② に代入して　$a^2+(2a-3)^2-4(2a-3)-16=0$

展開して整理すると　$a^2-4a+1=0$

これを解いて　$a=2\pm\sqrt{3}$　① から　$b=2(2\pm\sqrt{3})-3=1\pm 2\sqrt{3}$（複号同順）

よって　$(a,\ b)=(2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$，$(2-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$

7　(1)　△ABC の辺 BC の中点を M とする。等式 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　△ABC において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。このとき $2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3\mathrm{AD}^2+6\mathrm{BD}^2$ が成り立つことを証明せよ。

(1)　直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，中点 M は原点 O と一致し

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$　とおける。よって

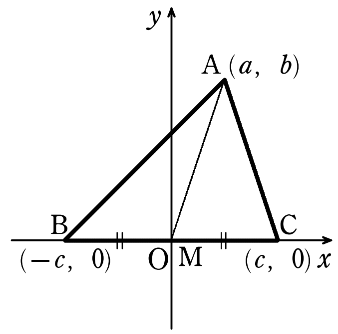
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$　……①

また　$\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=(-a)^2+(-b)^2+c^2$

$=a^2+b^2+c^2$　……②

ゆえに，①，② から　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$



(2)　直線 BC を x 軸に，点 D を通り直線 BC に垂直な直線を y 軸にとると，点 D は原点，B$(-c,\ 0)$，C$(2c,\ 0)$，A$(a,\ b)$ とおける。よって

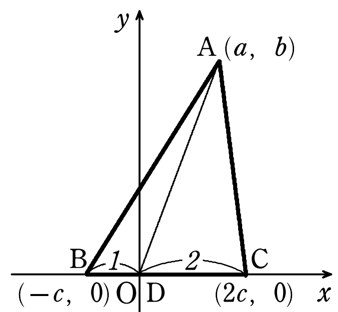
$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+(2c-a)^2+(-b)^2$

$=2(c^2+2ca+a^2+b^2)+4c^2-4ca+a^2+b^2$

$=3a^2+3b^2+6c^2$　……①

また　$3\mathrm{AD}^2+6\mathrm{BD}^2=3(a^2+b^2)+6c^2$　……②

①，② から　$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3\mathrm{AD}^2+6\mathrm{BD}^2$



8　(1)　点 $(3,\ -2)$ を通り，直線 ℓ ：$2x+y-1=0$ に平行な直線 ℓ_1，垂直な直線 ℓ_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　2直線 $ax+2y-a=0$，$x+(a+1)y-a-3=0$ は，$a=$ ア$\boxed{}$ のとき共有点をもたず，$a=$ イ$\boxed{}$ のとき一致する。

(1)　直線 ℓ の傾きは -2 であるから，直線 ℓ_1 の方程式は

$y-(-2)=-2(x-3)$　すなわち　$2x+y-4=0$

また，直線 ℓ_2 の傾きを m とすると $(-2)\cdot m=-1$ から　$m=\dfrac{1}{2}$

よって，直線 ℓ_2 の方程式は　$y-(-2)=\dfrac{1}{2}(x-3)$　すなわち　$x-2y-7=0$

(2)　$ax+2y-a=0$　……①，$x+(a+1)y-a-3=0$　……②　とする。

2直線 ①，② が平行（一致も含む）であるための条件は　$a(a+1)-1\cdot 2=0$

これを解いて　$a=1,\ -2$

$a=1$ のとき ① から　$x+2y-1=0$，② から　$x+2y-4=0$

よって，このとき，直線 ①，② は共有点をもたない。

$a=-2$ のとき ① から　$-2x+2y+2=0$　すなわち　$x-y-1=0$，② から

$x-y-1=0$ となり一致する。ゆえに　(ア)　1，(イ)　-2