1　$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a^3+b^3+c^3=3abc$

(2)　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

(1)　$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$

よって　$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)$

$=0$

ゆえに，$a+b+c=0$ のとき　$a^3+b^3+c^3=3abc$

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$

よって　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=a^3(a+2b)+b^3(-2a-b)-(a+b)^3(a-b)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^4+2a^3b+a^2b^2-a^2b^2-2ab^3-b^4)$

$=0$

ゆえに，$a+b+c=0$ のとき　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

2　(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{ab+cd}{ab-cd}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき，等式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{pa+qc}{pb+qd}=\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$ が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk$，$c=dk$ であるから

$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　$\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{ab+cd}{ab-cd}$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$ とおくと $a=bk$，$c=dk$，$e=fk$ であるから

$$\frac{a}{b}=k,\quad \frac{pa+qc}{pb+qd}=\frac{pbk+qdk}{pb+qd}=\frac{k(pb+qd)}{pb+qd}=k,$$

$$\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}=\frac{pbk+qdk+rfk}{pb+qd+rf}=\frac{k(pb+qd+rf)}{pb+qd+rf}=k$$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{pa+qc}{pb+qd}=\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$

3　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a\geqq1$，$b\geqq2$ ならば　$ab+2\geqq2a+b$

(2)　$x^2-6xy+10y^2\geqq4y-4$

(3)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

(1)　$a\geqq1$，$b\geqq2$ から　$a-1\geqq0$，$b-2\geqq0$

よって　$ab+2-(2a+b)=a(b-2)-(b-2)=(a-1)(b-2)\geqq0$

ゆえに　$ab+2\geqq2a+b$

等号が成り立つのは $a=1$ または $b=2$ のときである。

(2)　$(x^2-6xy+10y^2)-(4y-4)=x^2-6yx+10y^2-4y+4$

$=\{x^2-6yx+(3y)^2\}-(3y)^2+10y^2-4y+4$

$=(x-3y)^2+y^2-4y+4=(x-3y)^2+(y-2)^2\geqq0$

ゆえに　$x^2-6xy+10y^2\geqq4y-4$

等号が成り立つのは　$x-3y=0$　かつ　$y-2=0$

すなわち $x=6$，$y=2$ のときである。

(3)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq0$

ゆえに　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

等号が成り立つのは $ay=bx$ のときである。

4　a，b は正の数とする。次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+\dfrac{4}{a}\geqq4$

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq9$

(1)　$a>0$，$\dfrac{4}{a}>0$ であるから

$a+\dfrac{4}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=2\cdot2=4$　　よって　$a+\dfrac{4}{a}\geqq4$

等号が成り立つのは $a=\dfrac{4}{a}$　すなわち　$a=2$ のとき。

(2)　(左辺)$=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$　……①

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから　$ab+\dfrac{4}{ab}\geqq2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=2\cdot2=4$

よって，①から　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq4+5=9$

等号が成り立つのは $ab=\dfrac{4}{ab}$　すなわち　$ab=2$ のとき。

数学Ⅰ＋Ａ　演習問題⑫　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

5　直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。次のものを求めよ。

(1)　直線 ℓ に関して，点 $\mathrm{P}(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標

(2)　直線 ℓ に関して，直線 $m: 3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

(1)　点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　$\mathrm{PQ}\perp\ell$ から　$\dfrac{q+2}{p}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$　……①

[2]　線分 PQ の中点が ℓ 上にあるから　$\dfrac{p}{2}+2\cdot\dfrac{q-2}{2}-3=0$　……②

① から　$2p=q+2$，② から　$p+2q=10$

これを解いて　$p=\dfrac{14}{5}$，$q=\dfrac{18}{5}$　よって　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$

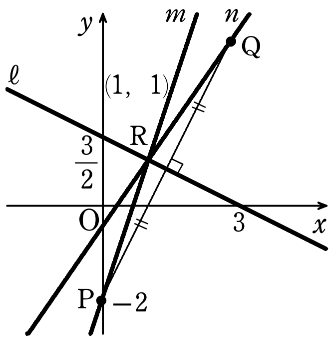
(2)　2 直線 ℓ，m の交点 R の座標は連立方程式

$x+2y-3=0$，$3x-y-2=0$ を解いて

$x=1$，$y=1$

すなわち，R の座標は $\mathrm{R}(1,\ 1)$ である。

また，$\mathrm{P}(0,\ -2)$ は $3\cdot0-(-2)-2=0$ から直線 m 上にあって R と異なる点であり，(1) の結果から，求める直線 n は 2 点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$，$\mathrm{R}(1,\ 1)$ を通る直線である。



よって，その方程式は　$\left(\dfrac{18}{5}-1\right)(x-1)-\left(\dfrac{14}{5}-1\right)(y-1)=0$

整理して　$13x-9y-4=0$

6　(1)　a は実数の定数とする。直線 $(2a+3)x-(4a-1)y-16a-3=0$ は，a の値にかかわらず定点 A を通る。定点 A の座標を求めよ。

(2)　2 直線 $2x-y+1=0$，$x+y-4=0$ の交点と点 $(-1,\ 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　a について整理すると

$2(x-2y-8)a+3x+y-3=0$

これが a の値にかかわらず成り立つ条件は

$x-2y-8=0$，$3x+y-3=0$

これを解いて　$x=2$，$y=-3$　　ゆえに　$\mathrm{A}(2,\ -3)$

(2)　k を定数とする方程式　$2x-y+1+k(x+y-4)=0$

すなわち　$(k+2)x+(k-1)y-4k+1=0$　……① は，2 直線 $2x-y+1=0$，$x+y-4=0$ の交点を通る直線を表す。

よって，直線 ① が点 $(-1,\ 2)$ を通るとすると

$(k+2)\cdot(-1)+(k-1)\cdot2-4k+1=0$　ゆえに　$k=-1$

これを ① に代入して，求める直線の方程式は　$x-2y+5=0$

7　xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$，$\mathrm{B}(8,\ 9)$ がある。点 P が直線 $y=x-3$ 上を動くとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

右の図のように，2 点 A，B は，直線 $\ell: y=x-3$ に関して同じ側にある。

直線 ℓ に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると，

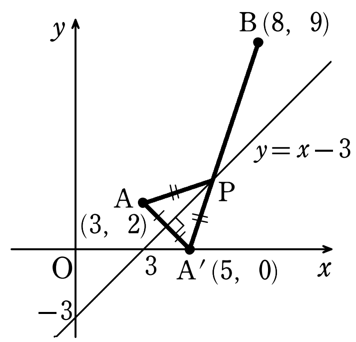
直線 ℓ の傾きは 1 で，明らかに　$a\neq3$

よって $\mathrm{AA}'\perp\ell$ から　$\dfrac{b-2}{a-3}\cdot1=-1$

ゆえに　$a+b=5$　……①

線分 AA' の中点が ℓ 上にあることから

$\dfrac{2+b}{2}=\dfrac{3+a}{2}-3$　　ゆえに　$a-b=5$　……②



①，② を解いて　$a=5$，$b=0$　よって　$\mathrm{A}'(5,\ 0)$

ここで $\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PB}\geqq\mathrm{A'B}$ であるから，3 点 A′，P，B が 1 つの直線上にあるとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ は最小値 $\mathrm{A'B}=\sqrt{(8-5)^2+(9-0)^2}=3\sqrt{10}$ をとる。

また，直線 A′B の方程式は　$y=3x-15$　……③　であるから，直線 ③ と ℓ の交点の座標を求めると

$3x-15=x-3$ から　$x=6$　このとき　$y=3$

したがって，求める点 P の座標は　$\mathrm{P}(6,\ 3)$

8　2 点 $\mathrm{A}(0,\ -2)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ と放物線 $y=x^2$ 上を動く点 P がある。△PAB の面積の最小値を求めよ。

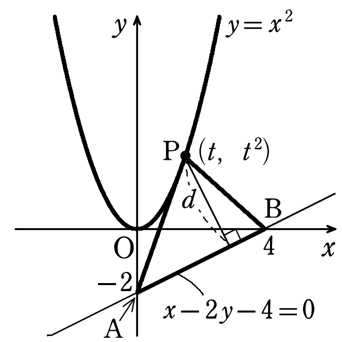
P は放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，その座標を $(t,\ t^2)$ と表す。また，直線 AB の方程式は

$\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=1$　ゆえに　$x-2y-4=0$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ と直線 AB の距離 d は

$d=\dfrac{|t-2t^2-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2t^2-t+4|}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



よって，△PAB の面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{|2t^2-t+4|}{\sqrt{5}}=|2t^2-t+4|$

ここで，$2t^2-t+4=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}>0$ であるから

$S=|2t^2-t+4|=2t^2-t+4=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}$

以上から，S は $t=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{31}{8}$ をとる。