数学Ⅰ＋A　演習問題⑬　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1　次の計算をして，結果を $a+bi$ (a，b は実数) の形で表せ。

(1) $(2+i)^2$　　(2) $\dfrac{3+2i}{1-5i}+\dfrac{1-2i}{1+5i}$

(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$　　(4) $\dfrac{2-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}}-\dfrac{4}{2-\sqrt{-8}}$

(1) $(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$

(2)
$$\frac{3+2i}{1-5i}+\frac{1-2i}{1+5i}=\frac{(3+2i)(1+5i)+(1-2i)(1-5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$
$$=\frac{(3+17i+10i^2)+(1-7i+10i^2)}{1-25i^2}$$
$$=\frac{(-7+17i)+(-9-7i)}{1+25}=\frac{-16+10i}{26}=-\frac{8}{13}+\frac{5}{13}i$$

(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(2+\sqrt{5}\,i)(3-\sqrt{5}\,i)=6+\sqrt{5}\,i-5i^2=11+\sqrt{5}\,i$

(4)
$$\frac{2-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}}-\frac{4}{2-\sqrt{-8}}=\frac{2-\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i}-\frac{4}{2-2\sqrt{2}\,i}=\frac{2-\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i}-\frac{2}{1-\sqrt{2}\,i}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{2}\,i)(1-\sqrt{2}\,i)-2(1+\sqrt{2}\,i)}{(1+\sqrt{2}\,i)(1-\sqrt{2}\,i)}$$
$$=\frac{2-3\sqrt{2}\,i+2i^2-2-2\sqrt{2}\,i}{1-2i^2}=-\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{3}i$$

2　(1) 次の等式を満たす実数 x，y の値を，それぞれ求めよ。

(ア) $(4+2i)x+(1+4i)y+7=0$　　(イ) $(x+2yi)(1+i)=3-2i$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}$ が (ア) 実数 (イ) 純虚数 となるように，実数 x の値を定めよ。

(1) (ア) 整理すると　$4x+y+7+2(x+2y)i=0$

x，y が実数のとき，$4x+y+7$，$2(x+2y)$ も実数である。

よって　$4x+y+7=0$ ……①　$x+2y=0$ ……②

①，② を解いて　$x=-2$，$y=1$

(イ) 与式から　$x+2yi=\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-5i+2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

x，$2y$ は実数であるから　$x=\dfrac{1}{2}$，$2y=-\dfrac{5}{2}$　よって　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{5}{4}$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}=\dfrac{(1+xi)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3+(3x-1)i-xi^2}{9-i^2}=\dfrac{x+3}{10}+\dfrac{3x-1}{10}i$

x が実数のとき $\dfrac{x+3}{10}$，$\dfrac{3x-1}{10}$ も実数であるから

(ア) $3x-1=0$　ゆえに　$x=\dfrac{1}{3}$

(イ) $x+3=0$，$3x-1\neq 0$　ゆえに　$x=-3$

3　2 乗すると $6i$ になるような複素数 $x+yi$ (x，y は実数) はちょうど 2 つ存在する。この x，y の値を求めよ。

$$(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=x^2-y^2+2xyi$$

これが $6i$ に等しいとき，x^2-y^2，$2xy$ は実数であるから

$$x^2-y^2+2xyi=6i \iff x^2-y^2=0,\ 2xy=6$$

よって $x^2-y^2=0$ から　$(x+y)(x-y)=0$

ゆえに　$y=\pm x$　……①

また，$2xy=6$ から　$xy=3$　……②

② より $xy>0$ であるから，x と y は同符号である。

よって，① から　$y=x$

ゆえに，② から　$x^2=3$　よって　$x=\pm\sqrt{3}$

したがって，求める x，y の値は

$x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}$　または　$x=-\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$

4　(1) 次の 2 次方程式を解け。

(ア) $3x^2+5x-2=0$　(イ) $2x^2+5x+4=0$　(ウ) $\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{2}=0$

(2) 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(ア) $2x^2-3x+5=0$　(イ) $9x^2+30x+25=0$

(ウ) $\sqrt{3}\,x^2+(\sqrt{3}-1)x-1=0$

(1) (ア) $(x+2)(3x-1)=0$　よって　$x=-2$，$\dfrac{1}{3}$

(イ) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{7}\,i}{4}$

(ウ) 両辺に 10 を掛けて　$x^2-2x+5=0$

よって　$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot5}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm2i$

(2) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とする。

(ア) $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot5=-31<0$

よって，異なる 2 つの虚数解をもつ。

(イ) $D/4=15^2-9\cdot25=0$

よって，重解をもつ。

(ウ) $D=(\sqrt{3}-1)^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot(-1)=(\sqrt{3}-1)^2+4\sqrt{3}>0$

よって，異なる 2 つの実数解をもつ。

数学Ⅰ＋Ａ　演習問題⑬　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

5 (1)　点 $(-3,\ 4)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ。

(2)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$ はどんな図形を表すか。

(3)　方程式 $x^2+y^2+2ax+3ay+13=0$ が円を表すとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　求める円の方程式は $(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$ と表せて，この円が原点を通ることから

$$(0+3)^2+(0-4)^2=r^2$$

ゆえに　$r^2=25=5^2$　よって　$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$

(2)　$\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+\left\{y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}=-6+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

ゆえに　$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

よって　中心 $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円

(3)　$(x^2+2ax+a^2)+\left\{y^2+3ay+\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right\}=-13+a^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2$

から　$(x+a)^2+\left(y+\frac{3}{2}a\right)^2=\frac{13}{4}a^2-13$

この方程式が円を表す条件は　$\frac{13}{4}a^2-13>0$　ゆえに $a^2-4>0$ から　$a<-2,\ 2<a$

6 (1)　2 点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(5,\ -1)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心と半径を求めよ。

(1)　直径の中点が中心，直径の長さの半分が半径の長さであり

中心の座標は　$\left(\frac{(-3)+3}{2},\ \frac{6+(-2)}{2}\right)$ から　$(0,\ 2)$

直径の長さは　$\sqrt{(3+3)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{36+64}=10$

よって　$x^2+(y-2)^2=5^2$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

この円が　点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$ を通るから　$-2l+6m+n=-40$　……①

点 $\mathrm{B}(1,\ -3)$ を通るから　$l-3m+n=-10$　……②

点 $\mathrm{C}(5,\ -1)$ を通るから　$5l-m+n=-26$　……③

①，② から　$l-3m=10$，②，③ から　$2l+m=-8$

これを解いて　$l=-2$，$m=-4$　更に，② から　$n=-20$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-4y-20=0$

これを変形して　$x^2-2x+1+y^2-4y+4=20+1+4$

すなわち　$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$

したがって，求める円の中心は $(1,\ 2)$，半径は 5

7 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通り，y 軸に接し，中心が直線 $y=2x$ 上にある円の方程式を求めよ。

中心が直線 $y=2x$ 上にあるから，円の中心の座標は $(t,\ 2t)$ と表される。また，y 軸に接するから，中心の x 座標の絶対値は円の半径に等しい。

よって，円の方程式は　$(x-t)^2+(y-2t)^2=t^2$　……①と表される。

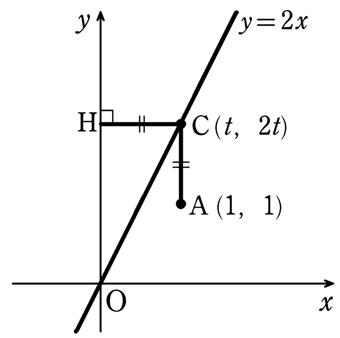
点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通るから，$x=1$，$y=1$ を ① に代入すると

$$(1-t)^2+(1-2t)^2=t^2$$

整理すると　$(t-1)(2t-1)=0$　よって　$t=1,\ \frac{1}{2}$

これを ① に代入して，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$$



別解　円の中心を C とすると　$\mathrm{C}(t,\ 2t)$

C から y 軸への垂線を CH とすると　$\mathrm{H}(0,\ 2t)$

点 C を中心とする円は，A，H を通るから

$\mathrm{CH}=\mathrm{CA}$

$\mathrm{CH}^2=t^2$，$\mathrm{CA}^2=(1-t)^2+(1-2t)^2$

よって $t^2=(1-t)^2+(1-2t)^2$ から　$t=1,\ \frac{1}{2}$

したがって，円の方程式は　$(x-1)^2+(y-2)^2=1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

8 (1)　円 $x^2+y^2=50$ と直線 $3x+y-20=0$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+a$ の共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるか。

(1)　$3x+y-20=0$ から　$y=-3x+20$　……①

① を円の方程式 $x^2+y^2=50$ に代入して

$x^2+(-3x+20)^2=50$　整理すると　$x^2-12x+35=0$

よって　$(x-5)(x-7)=0$　ゆえに　$x=5,\ 7$　このとき，① から順に　$y=5,\ -1$

ゆえに，求める共有点の座標は　$(5,\ 5)$，$(7,\ -1)$

(2)　円 $x^2+y^2=5$ の半径は $\sqrt{5}$ である。

円の中心 $(0,\ 0)$ と与えられた直線 $2x-y+a=0$ の距離を d とすると

$d=\frac{|2\cdot0-0+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}$　よって，共有点の個数は

$\frac{|a|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$　すなわち　$-5<a<5$ のとき　2 個

$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$　すなわち　$a=\pm5$ のとき　1 個

$\frac{|a|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$　すなわち　$a<-5,\ 5<a$ のとき　0 個