1　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$　　(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

(1)　$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=3+2+1=6$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot3=-2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot3\cdot2=-10$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}=\dfrac{\beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{(\beta-1)(\alpha-1)}=\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{-2-2}{3-2+1}=-2$

2　2 次方程式 $x^2-6x+k=0$ について，次の条件を満たすように，実数 k の値を定めよ。

(1)　1 つの解が他の解の 2 倍　　(2)　1 つの解が他の解の 2 乗

(1)　1 つの解が他の解の 2 倍であるから，この 2 次方程式の 2 つの解を α，2α とおく。

このとき解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=6$　……①，　$\alpha\cdot2\alpha=k$　……②

① から　$\alpha=2$　　よって，② から　$k=2\cdot2^2=8$

(2)　1 つの解が他の解の 2 乗であるから，この 2 次方程式の 2 つの解を α，α^2 とおく。

このとき解と係数の関係から　$\alpha+\alpha^2=6$　……①，　$\alpha\cdot\alpha^2=k$　……②

① から　$\alpha^2+\alpha-6=0$　よって　$(\alpha+3)(\alpha-2)=0$

ゆえに　$\alpha=-3,\ 2$

$\alpha=-3$ のとき　② から　$k=-27$，$\alpha=2$ のとき　② から　$k=8$

よって　$k=-27,\ 8$

3　x についての 2 次方程式 $x^2-(a-10)x+a+14=0$ の解が次の条件を満たすような実数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　異なる 2 つの正の解をもつ　　(2)　異符号の解をもつ

2 次方程式 $x^2-(a-10)x+a+14=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(1)　$\alpha\neq\beta$，$\alpha>0$，$\beta>0$ であるための条件は

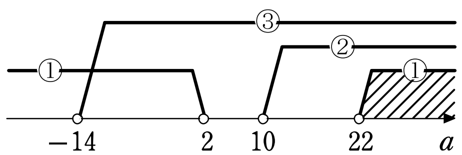
判別式 $D=(a-10)^2-4(a+14)=a^2-24a+44=(a-2)(a-22)>0$

ゆえに　$a<2,\ 22<a$　……①

また，$\alpha+\beta=a-10>0$ から　$a>10$　…②

$\alpha\beta=a+14>0$ から　$a>-14$ …③

よって，①，②，③ から，求める a の値の範囲は　$a>22$



(2)　α，β が異符号である条件は

$\alpha\beta=a+14<0$　ゆえに，求める a の値の範囲は　$a<-14$

4　2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件を満たす解をもつように，実数の定数 p の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　2 つの解がともに 1 より大きい。

(2)　1 つの解は 3 より大きく，他の解は 3 より小さい。

2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=2p$，$\alpha\beta=p+2$

また，判別式を D とすると　$D/4=p^2-(p+2)=(p+1)(p-2)$

(1)　$\alpha>1$，$\beta>1$ となる条件は

$D/4\geqq0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

[1]　$D/4\geqq0$ から　$(p+1)(p-2)\geqq0$

よって　$p\leqq-1,\ 2\leqq p$　……①

[2]　$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ すなわち $\alpha+\beta-2>0$ から　$2p-2>0$

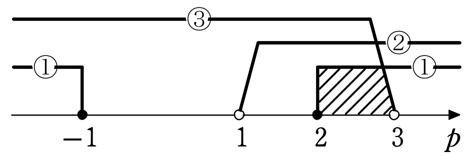
よって　$p>1$　……②

[3]　$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ すなわち $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から　$p+2-2p+1>0$

よって　$p<3$　……③

したがって，求める p の値の範囲は ①，②，③ の共通範囲であるから

$2\leqq p<3$



(2)　$\alpha<\beta$ とすると，$\alpha<3<\beta$ となる条件は

$(\alpha-3)(\beta-3)<0$　すなわち　$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9<0$

ゆえに　$p+2-3\cdot2p+9<0$　よって　$p>\dfrac{11}{5}$

5　2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみをもつような m の値とそのときの整数の解をすべて求めよ。

2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が 2 つの整数解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとすると

$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=3m$　……①

α，β は整数であるから，m は整数である。

① から m を消去すると　$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)$　ゆえに　$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=9$

よって　$(\alpha-3)(\beta-3)=9$

$\alpha-3$，$\beta-3$ $(\alpha-3\leqq\beta-3)$ は整数であるから，$\alpha-3$，$\beta-3$ の値の組 $(\alpha-3,\ \beta-3)$ は

$(\alpha-3,\ \beta-3)=(-9,\ -1),\ (-3,\ -3),\ (1,\ 9),\ (3,\ 3)$

すなわち　$(\alpha,\ \beta)=(-6,\ 2),\ (0,\ 0),\ (4,\ 12),\ (6,\ 6)$

このとき，m の値は ① から　$m=-4,\ 0,\ 16,\ 12$

したがって，求める整数解は

$m=-4$ のとき　$-6,\ 2$，$m=0$　のとき　0，

$m=12$　のとき　6，$m=16$　のとき　$4,\ 12$

6　円 $C: x^2+y^2-4x-2y+3=0$ と直線 ℓ ：$y=-x+k$ が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。また，ℓ が C によって切り取られてできる線分の長さが 2 となるとき，k の値を求めよ。

円 C の方程式を変形すると　$(x-2)^2+(y-1)^2=2$　よって，円 C の中心 $(2,\ 1)$，半径 $\sqrt{2}$

ゆえに，円 C の中心 C と直線 ℓ ：$x+y-k=0$ の距離は　$\dfrac{|2+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k-3|}{\sqrt{2}}$

円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わる条件は　$\dfrac{|k-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$

よって　$|k-3|<2$　ゆえに　$1<k<5$　……①

次に，円 C と直線 ℓ の異なる 2 つの交点を A，B とする。

C から線分 AB へ垂線 CM を引くと，M は線分 AB の中点であるから　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}$

三平方の定理により　$\mathrm{CM}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AM}^2}$

$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2$ とすると　$\mathrm{AM}=1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$　ゆえに　$\mathrm{CM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$

線分 CM の長さは，C と直線 ℓ の距離に等しいから　$\dfrac{|k-3|}{\sqrt{2}}=1$　ゆえに　$|k-3|=\sqrt{2}$

よって　$k=3\pm\sqrt{2}$　これは①を満たす。

7　(1)　次の円の周上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(ア)　$x^2+y^2=25$，$(3,\ 4)$　　　(イ)　$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，$(4,\ 6)$

(2)　点 $(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

(1)　(ア)　$3x+4y=25$

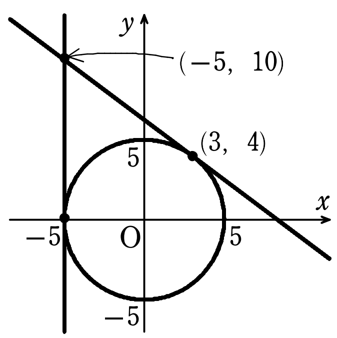
(イ)　(ア) の円と接点を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，(イ) の円と接点になる。よって，(イ) の接線も (ア) の接線を同じだけ平行移動すると得られる。よって，(イ) の接線の方程式は　$3(x-1)+4(y-2)=25$

ゆえに，求める接線の方程式は　$3x+4y=36$

別解　円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $(4,\ 6)$ における接線の方程式は

$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$　すなわち　$3x+4y=36$

(2)　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。



接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$　……①

これが点 $(-5,\ 10)$ を通るから　$-5x_1+10y_1=25$

ゆえに　$x_1=2y_1-5$　…②

また，接点は円上の点であるから

$x_1{}^2+y_1{}^2=25$　…③

②を③に代入して　$(2y_1-5)^2+y_1{}^2=25$

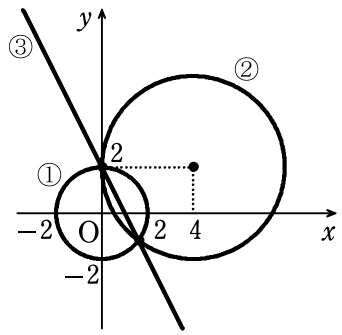
整理して　$y_1{}^2-4y_1=0$　すなわち　$y_1(y_1-4)=0$

ゆえに　$y_1=0,\ 4$　よって　②から順に　$x_1=-5,\ 3$

接線の方程式は　$x=-5$，$3x+4y=25$

8　2 円 $x^2+y^2=4$　……①，$x^2+y^2-8x-4y+4=0$　……②について

(1)　2 円が共有点をもつことを示せ。　　(2)　2 円の共有点の座標を求めよ。



(1)　円①は，中心の座標が $(0,\ 0)$，半径 2

円②は，$(x-4)^2+(y-2)^2=4^2$ から

中心の座標は $(4,\ 2)$，半径 4

よって，中心間の距離は $\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ であり

$|2-4|<2\sqrt{5}<2+4$

したがって，2 円は共有点をもつ。

(2)　連立方程式①，②を解く。

①を②に代入して　$4-8x-4y+4=0$

ゆえに　$y=-2x+2$　……③

③を①に代入して　$x^2+(-2x+2)^2=4$　　∴　$x(5x-8)=0$

ゆえに　$x=0,\ \dfrac{8}{5}$　このとき，③から　$x=0$ のとき $y=2$，$x=\dfrac{8}{5}$ のとき $y=-\dfrac{6}{5}$

よって，求める座標は　$(0,\ 2)$，$\left(\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$

9　2 つの円 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$　……①，$x^2+y^2-6x-8y+k=0$　……②について，次のものを求めよ。

(1)　2 つの円①，②が異なる 2 つの共有点をもつような，定数 k の値の範囲

(2)　2 つの円①，②が外接するとき，k の値と接点の座標

(1)　2 つの円の方程式を整理すると

①から　$(x+1)^2+(y-1)^2=4$　　……③

②から　$(x-3)^2+(y-4)^2=25-k$　……④

円④が円を表すことから　$25-k>0$　ゆえに　$k<25$　……⑤

円③の中心の座標は $(-1,\ 1)$，半径は 2

円④の中心の座標は $(3,\ 4)$，半径は $\sqrt{25-k}$

中心間の距離は　$\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

2 円③，④が異なる 2 つの共有点をもつ条件は　$|2-\sqrt{25-k}|<5<2+\sqrt{25-k}$

すなわち　$2-\sqrt{25-k}<5$ かつ $\sqrt{25-k}-2<5$ かつ $5<2+\sqrt{25-k}$

よって　$3<\sqrt{25-k}<7$　ゆえに　$3^2<25-k<7^2$

したがって　$-24<k<16$　これは⑤を満たす。

(2)　2 円①，②が外接するとき　$5=2+\sqrt{25-k}$

ゆえに $\sqrt{25-k}=3$ から　$25-k=9$　よって　$k=16$

これを②に代入して　$x^2+y^2-6x-8y+16=0$　……⑥

①，⑥から　$4x+3y-9=0$　……⑦　①，⑦を連立方程式として解くと

$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{11}{5}$　したがって，接点の座標は　$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$