数学Ⅰ＋A　演習問題⑮　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　整式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りは5，$x-2$ で割ると余りは7となる。このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを求めよ。

(2)　整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りが $7x$，$x-3$ で割った余りが1のとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)(x-3)$ で割った余りを求めよ。

(1)　整式 $f(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割った余りは1次式か定数である。ゆえに，商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ (a，b は定数) とおくと

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

整式 $f(x)$ を $x-1$，$x-2$ で割った余りが，それぞれ5，7であるから

$$f(1)=5,\ f(2)=7$$

よって　$a+b=5$　…… ①，$2a+b=7$　…… ②

①，② を解くと　$a=2$，$b=3$　ゆえに，求める余りは　$2x+3$

(2)　$P(x)=(x-1)(x+2)Q_1(x)+7x$　…… ① とおける。

また　$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q_2(x)+ax^2+bx+c$　…… ②　(ただし，a，b，c は定数) とおくと，① から　$P(1)=7$，$P(-2)=-14$　　条件から　$P(3)=1$

これらと ② から　$a+b+c=7$，$4a-2b+c=-14$，$9a+3b+c=1$

これを解いて　$a=-2$，$b=5$，$c=4$　よって，求める余りは　$-2x^2+5x+4$

$\boxed{2}$ (1)　1の3乗根を求めよ。

(2)　1の3乗根で虚数のものは2つあるが，その一方を ω とする。

（ア）　他方の虚数は ω と共役な複素数で，ω^2 に等しいことを示せ。

（イ）　$\omega^2+\omega+1$，$\omega^7+\omega^8$ の値を，それぞれ求めよ。

(1)　x を1の3乗根とすると　$x^3=1$

ゆえに　$x^3-1=0$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって　$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$ から　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

すなわち，1の3乗根は　$1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　（ア）　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき　$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき　$\omega^2=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

ゆえに，1の虚数の3乗根の一方を ω とすると，他方は ω と共役な複素数であり，ω^2 に等しい。

（イ）　ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

また，ω は1の3乗根であるから　$\omega^3=1$

ゆえに　$\omega^7+\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2$

よって　$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega+\omega^2=-1$　したがって　$\omega^7+\omega^8=-1$

$\boxed{3}$ (1)　3次方程式 $x^3+ax+b=0$ の1つの解が $1+2i$ であるとき，実数 a，b の値を求めよ。

(2)　3次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の1つの解が $x=2+i$ であるとき，実数 a，b の値と，他の解を求めよ。

(1)　与式の解が $1+2i$ であるから　$(1+2i)^3+a(1+2i)+b=0$

ゆえに　$a+b-11+(2a-2)i=0$

a，b は実数であるから $a+b-11$，$2a-2$ も実数。

よって $a+b-11=0$，$2a-2=0$ から　$a=1$，$b=10$

(2)　実数係数の3次方程式が虚数解 $x=2+i$ をもつから，それと共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解になる。

$\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}=x^2-4x+5$

であるから $x^3+ax^2+bx+10$ は x^2-4x+5 で割り切れる。

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+4) \\ \hline
x^2-4x+5 & x^3+ax^2+bx+10 \\
 & x^3-4x^2+5x \\ \hline
 & (a+4)x^2+(b-5)x+10 \\
 & (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \\ \hline
 & (4a+b+11)x-5a-10
\end{array}$$

よって　$x^3+ax^2+bx+10=(x^2-4x+5)(x+a+4)+(4a+b+11)x-5a-10$

ここで，余りは0であるから　$4a+b+11=0$，$-5a-10=0$

これを解くと　$a=-2$，$b=-3$　このとき，方程式は　$(x^2-4x+5)(x+2)=0$

したがって，他の解は　$x=2-i$，-2

$\boxed{4}$ (1)　n を2以上の整数とするとき，整式 x^n-1 を $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ。

(2)　x の整式 $P(x)$ を，x^2-3x+2，x^2-5x+6 で割ったときの余りがそれぞれ $x+1$，$5x-7$ であった。この整式を x^2-4x+3 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　求める余りは $ax+b$ とおけて，$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$，$Q(x)$ は x の整式と表せる。この式で $x=1$ とおくと　$0=a+b$　ゆえに　$b=-a$

よって　$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

ここで $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)$ であるから

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$$

この式で $x=1$ とおくと　$1+1+\cdots\cdots+1=a$　(左辺の1は n 個ある)

したがって $a=n$ であるから，求める余りは　$nx-n$

(2)　求める余りは $ax+b$ とおけて，$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ から

$P(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)+ax+b$，$Q_1(x)$ は x の整式　…… ①

と表せる。また $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ から

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x+1$，$Q_2(x)$ は x の整式　…… ②

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_3(x)+5x-7$，$Q_3(x)$ は x の整式　…… ③

と表せる。よって，① から　$P(1)=a+b$，$P(3)=3a+b$

一方，② から　$P(1)=1+1=2$，③ から　$P(3)=5\cdot3-7=8$

ゆえに　$a+b=2$，$3a+b=8$　これを解いて　$a=3$，$b=-1$

したがって，求める余りは　$3x-1$

数学Ⅰ＋Ａ　演習問題⑮　：　ちょっと難しい問題もありますががんばろう！

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{5}$ 定点 A$(6,\ 0)$，B$(3,\ 3)$ と定円 $x^2+y^2=9$ 上の動点 P を 3 つの頂点とする三角形の重心 G の軌跡を求めよ。

G$(x,\ y)$，P$(s,\ t)$ と表す。

P は定円 $x^2+y^2=9$ 上を動くから

$s^2+t^2=9$　　…… ①

G は △ABP の重心であるから

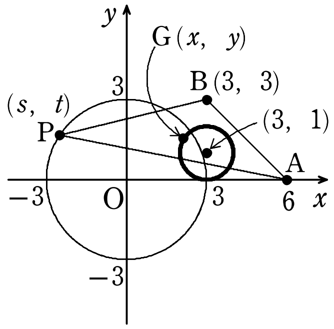
$x=\dfrac{6+3+s}{3}$，$y=\dfrac{0+3+t}{3}$　　…… ②

② から　$s=3x-9$，$t=3y-3$

① に代入して　$(3x-9)^2+(3y-3)^2=9$

両辺を 9 で割って　$(x-3)^2+(y-1)^2=1$　…… ③

逆に，円 ③ 上の任意の点は，上の計算を逆にたどることによって，条件を満たすことがわかる。よって，求める点 G の軌跡は　円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$



$\boxed{6}$ 放物線 C：$y=x^2$ と直線 ℓ：$y=m(x-1)$ は相異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

(1) $y=x^2$ と $y=m(x-1)$ から　$x^2-mx+m=0$　…… ①

C と ℓ が異なる 2 点で交わっているから，① の判別式を D とすると　$D>0$

ゆえに $D=m^2-4m>0$ から　$m<0,\ 4<m$

(2) 2 点 A，B の x 座標は，2 次方程式 ① の異なる 2 つの実数の解 α，β である。

線分 AB の中点を P$(x,\ y)$ とすると，解と係数の関係から

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}\quad \cdots\cdots ②$$

また，P は直線 ℓ 上の点であるから

$$y=m(x-1)=m\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{1}{2}m^2-m\quad \cdots\cdots ③$$

②，③ から m を消去して　$y=2x^2-2x$　ただし，(1) より　$x<0,\ 2<x$

よって，求める軌跡は　放物線の一部　$y=2x^2-2x\ (x<0,\ 2<x)$

$\boxed{7}$ 直線 $y=2ax+a^2$　…… ① について，a がすべての実数の値をとって変化するとき，直線 ① が通りうる領域を図示せよ。

① を a について整理すると

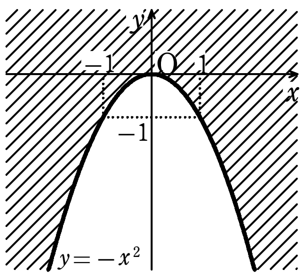
$a^2+2x\cdot a-y=0$　…… ②

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，a の方程式 ② が実数解をもつことである。

よって，$D/4=x^2-(-y)\geqq 0$ から

$y\geqq -x^2$

求める領域は，右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



$\boxed{8}$ x，y が 3 つの不等式 $3x-5y\geqq -16$，$3x-y\leqq 4$，$x+y\geqq 0$ を同時に満たすとき，$2x+5y$ の最大値，最小値を求めよ。

3 つの不等式の表す領域を図示すると，右の図の斜線部分 D (境界線を含む) になる。また

$2x+5y=k$　…… ①

とおくと，$2x+5y$ の最大値，最小値は，直線 ① と領域 D が共有点をもつときの k の最大値，最小値である。

直線 ① の傾きは $-\dfrac{2}{5}$ であるから

① が D の点 $(3,\ 5)$ を通るとき，k は最大で，最大値は

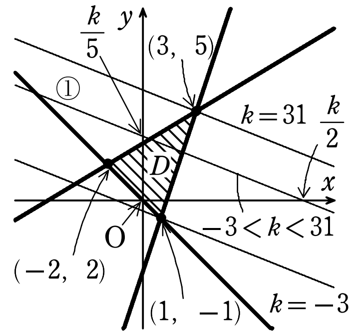
$6+25=31$

① が D の点 $(1,\ -1)$ を通るとき，k は最小で，最小値は

$2+(-5)=-3$

したがって　$x=3$，$y=5$ のとき最大値 31

$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 -3



$\boxed{9}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(x+y-2)(y-x^2)<0$　　　(2) $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

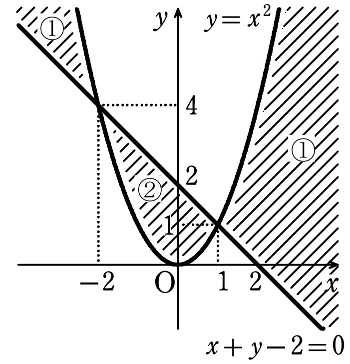
(1) 与えられた不等式は

① $\begin{cases} x+y-2>0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$　または

② $\begin{cases} x+y-2<0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$　と同値。

よって，①，② を合わせた領域で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2) 与式を変形すると

$(x^2+y^2-4)\{(x+2)^2+y^2-9\}\leqq 0$

これは $\begin{cases} x^2+y^2-4\geqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\leqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x^2+y^2-4\leqq 0 \\ (x+2)^2+y^2-9\geqq 0 \end{cases}$

すなわち　① $\begin{cases} x^2+y^2\geqq 2^2 \\ (x+2)^2+y^2\leqq 3^2 \end{cases}$

または　② $\begin{cases} x^2+y^2\leqq 2^2 \\ (x+2)^2+y^2\geqq 3^2 \end{cases}$

と同値。

よって，①，② を合わせた領域で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。