2006 年度大学入試センター試験　数学 II・B　60 分 100 点満点　2006.1.22 実施

1　[1] $0^\circ \leqq x < 180^\circ$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であるから，$y = f(\theta)$ とおくと

$$y = -\boxed{\text{エ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{オ}}\, t + \boxed{\text{カ}}$$ である。

したがって，y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，α が $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$ である。

[2] 不等式 $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5 \quad \cdots(*)$ が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1)　不等式 $(*)$ においては，x は対数の底であるから

$x > \boxed{\text{セ}}$ かつ $x \neq \boxed{\text{ソ}}$ を満たさなければならない。

また，$\log_x 27 = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 x}$ である。

(2)　不等式 $(*)$ は

$\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \leqq 0$$ と変形できる。

したがって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad \boxed{\text{ソ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$$ である。

$\boxed{\textbf{2}}$ a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1) 点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\, tx - t^{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}\, x - \boxed{\text{オ}}$$

であり，l と C_2 の接点の座標は

$$\left(\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}}\right)$$ である。

(2) C_1 と C_2 の交点を P とすると，P の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{シ}},\ (a + \boxed{\text{シ}})^2\right)$$

である。点 P を通って直線 l に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{ス}}\, x + a^{\boxed{\text{セ}}} - \boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は

$a > \boxed{\text{タ}}$ である。

$a > \boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x \geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}} + 1\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナニ}} - 1\right)$$

と表せる。

3　a，b，c を相異なる実数とする。数列 $\{x_n\}$ は等差数列で，最初の 3 項が順に a，b，c であるとし，数列 $\{y_n\}$ は等比数列で，最初の 3 項が順に c，a，b であるとする。

(1) b と c は a を用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a,\quad c=\boxed{\text{エオ}}\,a$$

と表され，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である。

(2) 等比数列 $\{y_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は，a を用いて $\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}a$ と表される。

(3) 数列 $\{z_n\}$ は最初の 3 項が順に b，c，a であり，その階差数列 $\{w_n\}$ が等差数列であるとする。このとき，$\{w_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a$ であり，

$\{w_n\}$ の一般項は

$$w_n=\frac{\boxed{\text{タ}}\,n-\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a$$

である。したがって，数列 $\{z_n\}$ の一般項は

$$z_n=\frac{a}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}\,n^2-\boxed{\text{ニヌ}}\,n+\boxed{\text{ネノ}}\right)$$

と表される。

4　平面上の三つのベクトル a, b, c は　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}+\vec{b}| = 1$
を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$ であるとする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また

$|2\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

(2) ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$\vec{c} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a} + \boxed{\text{ケ}}\,\vec{b}\right)$ である。

(3)　x, y を実数とする。ベクトル $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{c}$ が

$0 \leqq \vec{p}\cdot\vec{a} \leqq 1$, $0 \leqq \vec{p}\cdot\vec{b} \leqq 1$

を満たすための必要十分条件は

$\boxed{\text{コ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{サ}}$, $x \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,y \leqq x + \boxed{\text{ス}}$

である。x と y が上の範囲を動くとき，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ をとり，
この最大値をとるときの $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$\vec{p} = \boxed{\text{ソ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{タ}}\,\vec{b}$ である。