2007 年度大学入試センター試験　数学 I・A $\boxed{1}$ **解答と解説**　　配点 20 点

$\boxed{\mathbf{1}}$　[1] 方程式 $2(x-2)^2 = |3x-5|$ ……… ① を考える。

(1) 方程式①の解のうち，$x < \dfrac{5}{3}$ を満たす解は，

$x = \boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) 方程式①の解は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。その解のうちで最大のものを α とすると，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{オ}}$ である。

[2] 集合 A，B を

$A = \{n \mid n$ は 10 で割り切れる自然数 $\}$，$B = \{n \mid n$ は 4 で割り切れる自然数 $\}$　とする。

(1) 次の $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから一つずつ選べ。

自然数 n が A に属することは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{カ}}$。

自然数 n が B に属することは，n が 20 で割り切れるための $\boxed{\text{キ}}$。

⓪　必要十分条件である。

①　必要条件であるが，十分条件でない。

②　十分条件であるが，必要条件でない。

③　必要条件でも十分条件でもない。

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

$C = \{n \mid n$ は 10 と 4 のいずれでも割り切れる自然数 $\}$

$D = \{n \mid n$ は 10 でも 4 でも割り切れない自然数 $\}$

$E = \{n \mid n$ は 20 で割り切れない自然数 $\}$

とする。自然数全体の集合を全体集合とし，その部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ であらわすとき

$C = \boxed{\text{ク}}$，$D = \boxed{\text{ケ}}$，$E = \boxed{\text{コ}}$ である。

⓪　$A \cup B$　　①　$A \cup \overline{B}$　　②　$\overline{A} \cup B$　　③　$\overline{A \cup B}$

④　$A \cap B$　　⑤　$A \cap \overline{B}$　　⑥　$\overline{A} \cap B$　　⑦　$\overline{A \cap B}$

$\boxed{\text{解説}}$ [1] (1)$x<\dfrac{5}{3}$ より，$|3x-5|=-(3x-5)$ だから，方程式 $2(x-2)^2=|3x-5|$ …①は，
$2(x-2)^2=-(3x-5)$ となる。よって，$2x^2-8x+8=-3x+5$，$2x^2-5x+3=0$，
$(x-1)(2x-3)=0$ よって，$x=1$，$\dfrac{3}{2}$（$x<\frac{5}{3}$ を満たす。）

(2)$x\geqq\dfrac{5}{3}$ のとき，$|3x-5|=3x-5$ だから，方程式 $2(x-2)^2=|3x-5|$ …①は，
$2(x-2)^2=3x-5$ となる。よって，$2x^2-8x+8=3x-5$，$2x^2-11x+13=0$，
よって，$x=\dfrac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot2\cdot13}}{2\cdot2}=\dfrac{11\pm\sqrt{17}}{4}$
ここで，$\frac{11+\sqrt{17}}{4}$ は $4<\sqrt{17}<5$ より，$15<11+\sqrt{17}<16$ であるから，$x\geqq\frac{5}{3}$ を満たす。
一方，$\frac{11-\sqrt{17}}{4}$ については，$\frac{11-\sqrt{17}}{4}-\frac{5}{3}=\frac{3(11-\sqrt{17})-20}{12}=\frac{13-3\sqrt{17}}{12}=\frac{\sqrt{169}-\sqrt{153}}{12}>0$
よって，$x\geqq\frac{5}{3}$ を満たす。以上より，(1) と合わせて方程式①の解は 4 個ある。
その解のうちで最大のものは，$\frac{11+\sqrt{17}}{4}$ だから，
$\alpha=\frac{11+\sqrt{17}}{4}$ とおくと，$m\leqq\frac{11+\sqrt{17}}{4}<m+1$ を満たす整数 m を求める。
$4<\sqrt{17}<5$ より，$15<11+\sqrt{17}<16$ よって，$3<\dfrac{11+\sqrt{17}}{4}<4$
ゆえに，求める整数 m は，$m=3$

[2] 集合 A，B は，
$A=\{n\mid n$ は 10 で割り切れる自然数 $\}=\{10,20,30,40,50,\cdots\}$，
$B=\{n\mid n$ は 4 で割り切れる自然数 $\}=\{4,8,12,16,20,\cdots\}$ となる。
(1)p : 自然数 n が A に属すること，q : 自然数 n が 2 で割り切れることとおくと，
$p\Longrightarrow q$ は真。$q\Longrightarrow p$ は偽。反例は $n=2$ よって，p は q であるための十分条件である。
ゆえに② また，p : 自然数 n が B に属すること，q : 自然数 n が 20 で割り切れることとおくと，
$p\Longrightarrow q$ は偽。反例は $n=4$ $q\Longrightarrow p$ は真。よって，p は q であるための必要条件である。
ゆえに①

(2) 集合 C，D，E は，
$C=\{n\mid n$ は 10 と 4 のいずれでも割り切れる自然数 $\}=\{20,40,60,80,100,\cdots\}$
$D=\{n\mid n$ は 10 でも 4 でも割り切れない自然数 $\}=\{1,2,3,5,6,7,9,11,\cdots\}$
$E=\{n\mid n$ は 20 で割り切れない自然数 $\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\cdots,19,21,\cdots\}$
となる。それぞれの集合を A，B を用いて表すと，
$C=A\cap B$ よって，④
$D=\overline{A\cup B}$ よって，③
$E=\overline{A\cap B}$ よって，⑦