2007 年度大学入試センター試験　数学 I・A　3　解答と解説　　配点 30 点

3　△ ABC において，$AB = 2$，$BC = \sqrt{5}+1$，$CA = 2\sqrt{2}$ とする。また，△ ABC の外接円の中心を O とする。

(1) このとき，$\angle ABC = \boxed{アイ}^\circ$ であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

(2) 円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる。
△ ABD の面積を S_1，△ BCD の面積を S_2 とするとき，

$\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{5}-1$　………　①であるとする。

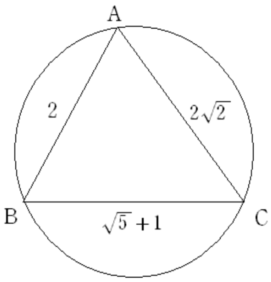
$\angle BAD + \angle BCD = \boxed{カキク}^\circ$ であるから，

$CD = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}AD$ となる。このとき，$CD = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{スセ}}$ である。

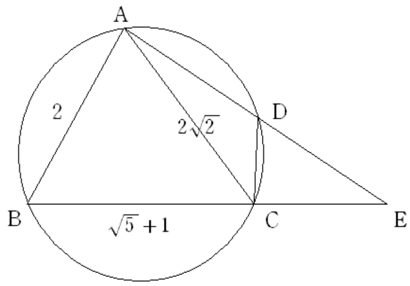
さらに，2 辺 AD，BC の延長の交点を E とし，△ ABE の面積を S_3，△ CDE の面積を S_4 とする。このとき，

$\dfrac{S_3}{S_4} = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$　………　②である。①と②より，$\dfrac{S_2}{S_4} = \dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ となる。

解説



(1) △ ABC に余弦定理を用いると，$\cos B=\dfrac{2^2+(\sqrt{5}+1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{1}{2}$
よって，$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$
また，△ ABC に正弦定理を用いると，外接円の半径を R として，$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$
よって，$R=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$



(2) 四角形 ABCD は円に内接している。円に内接する四角形において向かい合う内角の和は 180 °
だから，$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=180^\circ$ 次に，$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{AD}\sin A$，$S_2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin C$
を①に代入して，$\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{AD}\sin A}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin C}=\sqrt{5}-1$　$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=180^\circ$ より，$\sin A=\sin C$
だから，$2\mathrm{AD}=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\mathrm{CD}$　よって，$\mathrm{CD}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}$
また，$\mathrm{CD}=x$ とおくと，$\mathrm{AD}=2x$，$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$ より，$\angle \mathrm{ADC}=120^\circ$ とわかるので，
△ ACD に余弦定理を用いると，$(2\sqrt{2})^2=(2x)^2+x^2-2\cdot 2x\cdot x\cos 120^\circ$
整理すると，$7x^2=8$　よって，$\mathrm{CD}=\dfrac{2}{7}\sqrt{14}$

(3) $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{CDE}=60^\circ$ だから，二角相等により，△ ABE ∽ △ CDE である。
相似な図形の面積比は相似比の 2 乗だから，$\dfrac{S_3}{S_4}=\dfrac{2^2}{\mathrm{CD}^2}=\dfrac{4}{\frac{8}{7}}=\dfrac{7}{2}$
②より，$S_3=\frac{7}{2}S_4$　また，$S_1+S_2+S_4=S_3$　①より $S_1=(\sqrt{5}-1)S_2$
以上より，$(\sqrt{5}-1)S_2+S_2+S_4=\frac{7}{2}S_4$　$\sqrt{5}S_2=\frac{5}{2}S_4$
よって，$\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$