2007 年度大学入試センター試験　数学 I・A　$\boxed{4}$　解答と解説　　　配点 25 点

$\boxed{\mathbf{4}}$　1 辺の長さ 1 の正六角形があり，その頂点の一つを A とする。一つのさいころを 3 回投げ，点 P を次の (a)，(b)，(c) にしたがって，この正六角形上を反時計回りに進める。

(a)　頂点 A から出発して，1 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(b)　1 回目で点 P がとまった位置から出発して，2 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(c)　2 回目で点 P がとまった位置から出発して，3 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(1) 3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を 1 周してちょうど頂点 A に到達する目の出方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである。

3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである。

(2) 3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ であり，

ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(3) 3 回進める間に，点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 回である。

$\boxed{\text{解説}}$　(1)3 回進めたとき, 点 P が正六角形の辺上を 1 周してちょうど頂点 A に到達するのは, (a),(b),(c) の操作で出るさいころの目の和が 6 になるときである。目の出方を (a-b-c) と表すと, (1-1-4),(1-2-3),(1-3-2),(1-4-1),(2-1-3),(2-2-2),(2-3-1),(3-1-2),(3-2-1),(4-1-1) の 10 通り。
3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらないのは，$(6-1)(6-1)(6-1)=125$ 通り。

(2)3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる場合は (6-6-6) のみの 1 通り。
よって，求める確率は，$\frac{1}{216}$ となる。
ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる場合は，以下の 3 つの場合がある。
ⅰ) (6-6-6 以外) のとき，$1\times1\times5=5$ 通り。
ⅱ) (6-b-c) : b+c=6 のとき，$1\times5=5$ 通り。
ⅲ) (a-b-6) : a+b=6 のとき，$5\times1=5$ 通り。ⅰ), ⅱ), ⅲ) は互いに排反なので 15 通り。
よって，求める確率は，$\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$ となる。
次に，3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる場合は,
(1) の 10 通りに加えて，以下の 3 つの場合がある。
ⅰ) (6-6 以外-c) : b+c=6 以外のとき，$5\times5=25$ 通り。
ⅱ) (a-b-6 以外) : a+b=6 のとき，$5\times5=25$ 通り。
ⅲ) 2 周目ではじめて A にとまるとき，(1-6-5),(2-5-5),(2-6-4),(3-4-5),(3-5-4),(3-6-3),
(4-3-5),(4-4-4),(4-5-3),(4-6-2),(5-2-5),(5-3-4),(5-4-3),(5-5-2),(5-6-1) の 15 通り。
ⅰ), ⅱ), ⅲ) は互いに排反なので (1) と合わせて，$10+25+25+15=75$ 通り。
よって, 求める確率は，$\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$
※ (1) の 125 通りと合わせて合計 216 通りになる。二通りの方法で確認ができるとよい！
余事象による $\boxed{\text{別解}}$　:　すべての場合の数は，$6^3=216$ 通り。
3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる場合は (6-6-6) のみの 1 通り。
3 回進める間に，点 P がちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる場合は,
ⅰ) (a)，(b) で点 A にとまり，(c) では点 A にとまらない。→ (6-6-6 以外) のとき，5 通り。
ⅱ) (a) で点 A にとまり，(b) では点 A にとまらず，(c) で点 A にとまる。
→ (6-b-c) : b+c=6 のとき，5 通り。
ⅲ) (a) では点 A にとまらず，(b)，(c) で点 A にとまる。→ (a-b-6) : a+b=6 のとき，5 通り。
ⅰ), ⅱ), ⅲ) は互いに排反なので 15 通り。
次に，3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる場合は,
ⅰ) (a) で点 A にとまり，(b)，(c) では点 A にとまらない。
→ (6-6 以外-c) : b+c=6 以外のとき，25 通り。
ⅱ) (a) で点 A にとまらず，(b) で点 A にとまり，(c) では点 A にとまらない。
→ (a-b-6 以外) : a+b=6 のとき，25 通り。
ⅲ) (c) で初めて点 A にとまるのは，(1) の 10 通りと 2 周目ではじめて A にとまるときの 15 通り。
ⅰ), ⅱ), ⅲ) は互いに排反なので，$25+25+10+15=75$ 通り。
よって，3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は
$216-(1+15+75)=125$ 通りである。

(3)3 回進める間に，点 P が頂点 A にとまる回数の期待値を求めるために,
表を書くと右図のようになる。

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

よって, 求める期待値は，$0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$