1　[1] 不等式 $\sin 2x > \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよう。

ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。$a = \sin x$，$b = \cos x$ とおくと，与えられた不等式は

$$\boxed{ア}\,ab + \boxed{イ}\,a - \boxed{ウ}\,b - 1 > 0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{エ}} < x < \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi \quad または \quad \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi < x < \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi \quad である。$$

[2] 不等式 $2 + \log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2\log_y(1 - \frac{x}{2})$ の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y > \boxed{サ}$，$y \neq \boxed{シ}$ である。

真数は正であるから $x < \boxed{ス}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し a を底といい，b を真数という。

また　$\log_{\sqrt{y}} 3 = \dfrac{\boxed{セ}}{\log_3 y}$，$\log_y 81 = \dfrac{\boxed{ソ}}{\log_3 y}$　であるから，与えられた不等式は

$$1 < \frac{\boxed{タ}}{\log_3 y} + \frac{\log_3(1 - \frac{x}{2})}{\log_3 y}$$　となる。よって

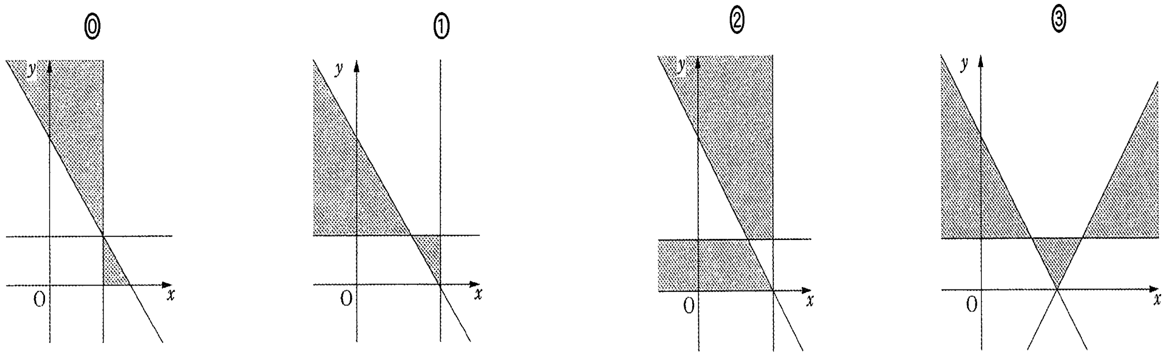
$y > \boxed{チ}$　のとき，$\log_3 y < \log_3\{\boxed{ツ}(1 - \frac{x}{2})\}$

$\boxed{テ} < y < \boxed{チ}$ のとき，$\log_3 y > \log_3\{\boxed{ツ}(1 - \frac{x}{2})\}$　となる。

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{ト}$ の影をつけた部分となる。

ただし，境界 (境界線) は含まない。

$\boxed{ト}$ に当てはまるものを次の ◎〜③のうちから一つ選べ。



$\boxed{\text{解説}}$　[1] 二倍角の公式と加法定理により，不等式を変形すると

$2\sin x\cos x > \sqrt{2}(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}$ より，$a = \sin x$，$b = \cos x$ とおくと，

与えられた不等式は　$4ab + 2a - 2b - 1 > 0$　左辺の因数分解をして，$(2a-1)(2b+1) > 0$

それぞれの因数は同符号だから，$a = \sin x$，$b = \cos x$ を戻して，

ｉ）$\sin x > \frac{1}{2}$ かつ $\cos x > -\frac{1}{2}$，または，

ⅱ）$\sin x < \frac{1}{2}$ かつ $\cos x < -\frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ で x の範囲を求めると，

ｉ）から $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2}{3}\pi$，ⅱ）から $\dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi$

[2] まず，y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y > 0$，$y \neq 1$ である。

次に，真数は正であるから $x < 2$ である。

また，$\log_{\sqrt{y}} 3 = \dfrac{2}{\log_3 y}$，$\log_y 81 = \dfrac{4}{\log_3 y}$ を代入して，両辺 2 で割ると，

与えられた不等式は，$1 < \dfrac{1}{\log_3 y} + \dfrac{\log_3(1-\frac{x}{2})}{\log_3 y}$ となる。

よって，$y > 1$ のとき，$\log_3 y > 0$ だから，$\log_3 y < \log_3\{3(1-\frac{x}{2})\}$

$0 < y < 1$ のとき，$\log_3 y < 0$ だから，$\log_3 y > \log_3\{3(1-\frac{x}{2})\}$ となる。

以上の不等式を解くと，ｉ）$y > 1$ のとき，$y < 3(1-\frac{x}{2})$，

ⅱ）$0 < y < 1$ のとき，$y > 3(1-\frac{x}{2})$ となる。

真数条件 $x < 2$ に注意して，求める領域を図示すると，次の図①の影をつけた部分となる。

ただし，境界 (境界線) は含まない。