**2007 年度大学入試センター試験　数学 II・B** $\boxed{2}$ **解答と解説**　　配点 30 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 　$a > 0$ として，$x$ の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $f(x) = x^3 - x$，$g(x) = f(x-a) + 2a$ とする。

**(1)** 二つの関数の差 $g(x) - f(x)$ は $g(x) - f(x) = a\left(\boxed{\text{アイ}}\,x^2 + \boxed{\text{ウ}}\,ax - a^2 + \boxed{\text{エ}}\right)$

と表され，$x$ の方程式 $g(x) - f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつような $a$ の範囲は

$0 < a < \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

また，$g(x) - f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最大値 $\dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$ をとる。

**(2)** (1) で得られた $h(a) = \dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$ と表す。$h(a)$ を $a$ の関数と考えるとき，

$h(a)$ は $a = \boxed{\text{ス}}$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

**(3)** $a = \sqrt{3}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の二つの交点 P，Q の座標は

$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}}, 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)$ であり，

二つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$S = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。さらに，交点 $\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}}, 0\right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と

曲線 $y = g(x)$ の接線がなす角を $\theta\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

$\boxed{\text{解説}}$ (1) 二つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は,

$g(x)-f(x)=f(x-a)+2a-f(x)=f(x-a)-f(x)+2a$

$=(x-a)^3-(x-a)-(x^3-x)+2a=a(-3x^2+3ax-a^2+3)$

$x$ の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる二つの実数解をもつのは,

$3x^2-3ax+a^2-3=0$ の判別式を $D$ とおくと,

$D=(3a)^2-4\cdot 3(a^2-3)=-3a^2+36$,

$D>0$ より, $a^2-12<0$, $(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$a>0$ とあわせて, $0<a<2\sqrt{3}$

また, $g(x)-f(x)=a(-3x^2+3ax-a^2+3)=-3a(x-\frac{a}{2})^2-\frac{1}{4}a^3+3a$ より,

$x=\dfrac{a}{2}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{4}(12-a^2)$ をとる。

(2)(1) で得られた $h(a)=\frac{a}{4}(12-a^2)$ とおくと, $a$ の3次関数と考えられるので,

$h'(a)=-\frac{3}{4}a^2+3$ より, $h'(a)=0$ とおくと, $0<a<2\sqrt{3}$ より, $a=2$ において

極大かつ最大となる。よって, $h(a)$ は $a=2$ で最大値 $4$ をとる。

(3)$a=\sqrt{3}$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の二つの交点P, Qの $x$ 座標は,

$3x^2-3\sqrt{3}x=0$ の二解であるから, $\mathrm{P}(0,0)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{3},2\sqrt{3})$ であり,

二つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$S=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}(-3\sqrt{3}x^2+9x)dx=\left[-\sqrt{3}x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$ である。

さらに, 交点 $\mathrm{P}(0,0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線がなす角を

$\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=3(x-\sqrt{3})^2-1$ より,

点 $\mathrm{P}(0,0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線が,

$x$ 軸の正方向とのなす角をそれぞれ $\alpha$, $\beta$ とおくと,

$\tan\alpha=f'(0)=-1$, $\tan\beta=g'(0)=8$ となる。

ここで, $\theta=\alpha-\beta$ だから,

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-1-8}{1+(-1)\cdot 8}=\dfrac{9}{7}$ である。