$\boxed{\mathbf{3}}$　三つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項が -27 で，漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 60$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。

このとき　$a_n = \boxed{\text{ア}}^{\,n} - \boxed{\text{イウ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{\,n} - \boxed{\text{キ}}\right) - \boxed{\text{イウ}}\,n$

である。また，$S_n > 0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 第 n 項が $2b_n + c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n + c_n\}$ は初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項が $b_n - 2c_n$ で与えられる数列 $\{b_n - 2c_n\}$ は初項が x で公比が r の等比数列になるとする。このとき　$b_n + c_n$ は

$$b_n + c_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1) - \frac{\boxed{\text{サ}}\,xr^{n-1}}{\boxed{\text{シ}}}$$ と表される。

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は (1)，(2) を満たすとする。さらに，第 n 項が $b_n + c_n$ で与えられる数列 $\{b_n + c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であるとする。このとき

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d + \frac{\boxed{\text{サ}}\,x(1-r)r^{n-1}}{\boxed{\text{シ}}}$$ であるから，(1) より

$r = \boxed{\text{ス}}$，$x = \dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$d = \boxed{\text{ツテト}}$ である。

したがって，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の第 n 項は，それぞれ

$b_n = -\dfrac{\boxed{\text{ナ}}^{\,n}}{\boxed{\text{ニ}}} - \boxed{\text{ヌネ}}(n-1)$，$c_n = \boxed{\text{ノ}}^{\,n} - \boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$ である。

$\boxed{\text{解説}}$ (1) 与えられた漸化式を変形すると，$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$ となるので，
数列 $\{a_n+30\}$ は，初項が $a_1+30=-27+30=3$，公比 3 の等比数列となる。
よって，$a_n+30=3\cdot 3^{n-1}$ ゆえに，$a_n=3^n-30$
$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3^k-30)=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\frac{3}{2}(3^n-1)-30n$
また，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は，$\dfrac{3}{2}(3^n-1)-30n>0$ より，$3^n-1>20n$ …①
$n=4$ のとき，$3^4-1>20\cdot 4$ は成り立たない。$n=5$ のとき，$3^5-1>20\cdot 5$ は成立。
よって，①を満たす最小の自然数は $n=5$ となる。

(2) 数列 $\{2b_n+c_n\}$ は初項が 0 で公差が d の等差数列だから，$2b_n+c_n=0+(n-1)d$ …②
また，数列 $\{b_n-2c_n\}$ は初項が x で公差が r の等比数列だから，$b_n-2c_n=x\cdot r^{n-1}$ …③
②× 2 +③より，$5b_n=2(n-1)d+x\cdot r^{n-1}$ …④,
②−③× 2 より，$5c_n=(n-1)d-2x\cdot r^{n-1}$ …⑤,
④+⑤から，$5b_n+5c_n=3d(n-1)-x\cdot r^{n-1}$
よって，$b_n+c_n=\dfrac{3}{5}d(n-1)-\dfrac{1}{5}x\cdot r^{n-1}$ と表される。

(3) 数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であることから，$(b_{n+1}+c_{n+1})-(b_n+c_n)=a_n$
とおけるので，(2) の結果を代入すると，$a_n=(\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}x\cdot r^n)-\left\{\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}x\cdot r^{n-1}\right\}$
よって，$a_n=\dfrac{3}{5}d+\dfrac{1\cdot x(1-r)r^{n-1}}{5}$ である。(1) より，$a_n=3^n-30$ だから，
定数と指数部分を比較すると，$\frac{3}{5}d=-30$，$\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}=3^n$
以上を解くと，$r=3$，$x=\frac{-15}{2}$，$d=-50$ となる。
したがって，数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の第 n 項は，
上記の結果をそれぞれ④，⑤に代入し，両辺を 5 で割ると，
$b_n=-\dfrac{3^n}{2}-20(n-1)$，$c_n=3^n-10(n-1)$ である。