$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(− 2, − 1, − 2) がある。$0 < a < 1$ とし，線分 AB を $a : (1-a)$ の比に内分する点を E，線分 CD を $a : (1-a)$ の比に内分する点を F とする。

**(1)** $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は $a$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\,a\right)$ と表される。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

**(2)** $a = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0 < b < 1$ として，線分 EF を $b : (1-b)$ の比に内分する点を G とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は $b$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ と表される。

**(3)** (2) において，直線 OG と直線 BC が交わるときの $b$ の値とその交点 H の座標を求めよう。
点 H は直線 BC 上にあるから，実数 $s$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 $t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。

よって，$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$, $s = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$, $t = \boxed{\text{テ}}$ である。したがって，

点 H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$ である。

また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}$ : 1 に外分する点である。

$\boxed{解説}$　(1) 点 E は線分 AB を $a:(1-a)$ の比に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=((1-a),a,a)$　また，
点 F は線分 CD を $a:(1-a)$ の比に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=((1-a)-2a,\ -a,(1-a)-2a)$
よって，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(-2a,\ -2a,1-4a)$ と表される。
さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となればよいから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,1,1)$ より，
$(-2a)\times(-1)+(-2a)\times 1+(1-4a)\times 1=0$ より，$a=\dfrac{1}{4}$ となる。

(2)$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\mathrm{E}\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ より，点 G は線分 EF を $b:(1-b)$ の比に
内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{3}{4}(1-b)+\dfrac{1}{4}b,\dfrac{1}{4}(1-b)-\dfrac{1}{4}b,\dfrac{1}{4}(1-b)+\dfrac{1}{4}b\right)=\left(\dfrac{3-2b}{4},\dfrac{1-2b}{4},\dfrac{1}{4}\right)$
と表される。

(3)(2) において，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(s,1-s,1-s+s)$　…①
また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{3-2b}{4}t,\dfrac{1-2b}{4}t,\dfrac{1}{4}t\right)$　…②
①，②を比較して，$s=\dfrac{3-2b}{4}t$，$1-s=\dfrac{1-2b}{4}t$，$1=\dfrac{1}{4}t$
これらを解くと，$b=\dfrac{3}{4},s=\dfrac{3}{2},t=4$ である。
したがって，点 H の座標は①に代入して，$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{-1}{2},1\right)$ である。
また，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，点 H は線分 BC を 3 : 1 に外分する点である。