2007 年度大学入試センター試験　数学 II・B　60 分 100 点満点　2007.1.21 実施

1　[1] 不等式 $\sin 2x > \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$　を満たす x の範囲を求めよう。

ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，与えられた不等式は

$\boxed{\text{ア}}\,ab+\boxed{\text{イ}}\,a-\boxed{\text{ウ}}\,b-1>0$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<x<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$　または　$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$　である。

[2] 不等式 $2+\log_{\sqrt{y}}3<\log_y 81+2\log_y(1-\frac{x}{2})$　の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y>\boxed{\text{サ}}$，$y\neq\boxed{\text{シ}}$ である。

真数は正であるから $x<\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し a を底といい，b を真数という。

また　$\log_{\sqrt{y}}3=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y}$，$\log_y 81=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$　であるから，与えられた不等式は

$1<\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y}+\dfrac{\log_3(1-\frac{x}{2})}{\log_3 y}$　となる。よって

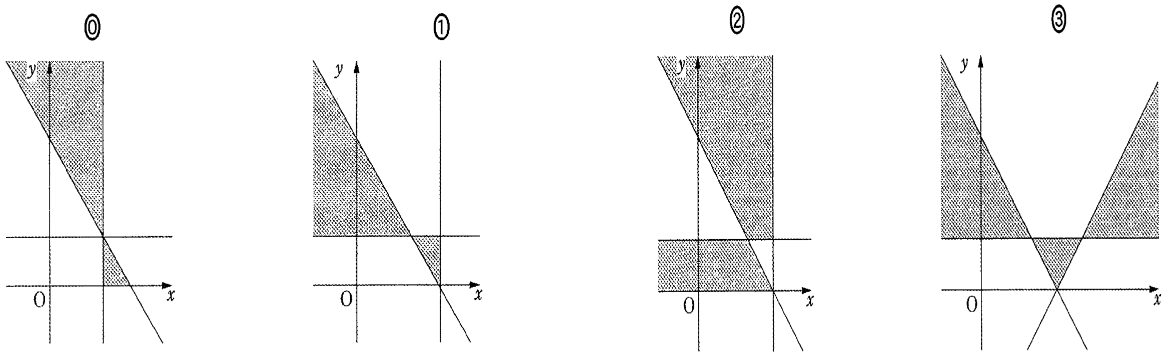
$y>\boxed{\text{チ}}$　のとき，$\log_3 y<\log_3\{\boxed{\text{ツ}}(1-\frac{x}{2})\}$

$\boxed{\text{テ}}<y<\boxed{\text{チ}}$ のとき，$\log_3 y>\log_3\{\boxed{\text{ツ}}(1-\frac{x}{2})\}$　となる。

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。

ただし，境界 (境界線) は含まない。

$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを次の ⓪〜③のうちから一つ選べ。



$\boxed{\textbf{2}}$　$a > 0$ として，x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $f(x) = x^3 - x$，$g(x) = f(x - a) + 2a$ とする。

(1) 二つの関数の差 $g(x) - f(x)$ は $g(x) - f(x) = a\left(\boxed{\text{アイ}}\,x^2 + \boxed{\text{ウ}}\,ax - a^2 + \boxed{\text{エ}}\right)$ と表され，x の方程式 $g(x) - f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の範囲は

$0 < a < \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

また，$g(x) - f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最大値 $\dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$ をとる。

(2) (1) で得られた $h(a) = \dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$ と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき，

$h(a)$ は $a = \boxed{\text{ス}}$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の二つの交点 P，Q の座標は

$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}}, 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)$ であり，

二つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$S = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。さらに，交点 $\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}}, 0\right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と

曲線 $y = g(x)$ の接線がなす角を $\theta\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$　三つの数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ ，$\{c_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，初項が -27 で，漸化式 $a_{n+1}=3a_n+60$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。

このとき　$a_n=\boxed{\text{ア}}^{\,n}-\boxed{\text{イウ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{\,n}-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$

である。また，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(2) 第 n 項が $2b_n+c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n+c_n\}$ は初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項が b_n-2c_n で与えられる数列 $\{b_n-2c_n\}$ は初項が x で公比が r の等比数列になるとする。このとき　b_n+c_n は

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}\,xr^{n-1}}{\boxed{\text{シ}}}$$ と表される。

(3) 数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ ，$\{c_n\}$ は (1)，(2) を満たすとする。さらに，第 n 項が b_n+c_n で与えられる数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であるとする。このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}\,x(1-r)r^{n-1}}{\boxed{\text{シ}}}$$ であるから，(1) より

$$r=\boxed{\text{ス}},\quad x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad d=\boxed{\text{ツテト}}$$ である。

したがって，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の第 n 項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}^{\,n}}{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌネ}}(n-1),\quad c_n=\boxed{\text{ノ}}^{\,n}-\boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$ である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(− 2, − 1, − 2) がある。$0 < a < 1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を E，線分 CD を $a:(1-a)$ の比に内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\,a\right)$ と表される。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0 < b < 1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を G とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ と表される。

(3) (2) において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値とその交点 H の座標を求めよう。
点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。

よって，$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$, $s = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$, $t = \boxed{\text{テ}}$ である。したがって，

点 H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$ である。

また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}$: 1 に外分する点である。