$\boxed{1}$ 次の$\boxed{}$を正しく埋めよ.

(1) $(a+b+3)(a+b-3)$ を展開し整理すると$\boxed{(ア)}$となる。

(2) $a=\sqrt{2}-1$ のとき, $a+\dfrac{1}{a}=\boxed{(イ)}$, $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\boxed{(ウ)}$である。

(3) $y=2x^2+ax+b$ (a, b は定数) のグラフが2点 (1, 0) と (3, 0) を通るとき, $a=\boxed{(エ)}$, $b=\boxed{(オ)}$である。

(4) $-2\leqq x\leqq 1$ における $y=x^2+2x+a$ (a は定数) の最小値は2である。このとき, $a=\boxed{(カ)}$であり, 最大値は$\boxed{(キ)}$である。

解説

(1) 与式$=(a+b)^2-3^2=a^2+2ab+b^2-9$ 答

(2) $a=\sqrt{2}-1$ のとき, $a+\dfrac{1}{a}=(\sqrt{2}-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1+\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$ 答

また, $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\dfrac{1}{a}=(2\sqrt{2})^2-2=6$ 答

(3) $y=2x^2+ax+b$ のグラフが2点 (1, 0) と (3, 0) を通るので, 式に代入して,

$0=2+a+b$, $0=18+3a+b$ これらを解くと, $a=-8$, $b=6$ 答

別解 グラフの x 切片が1, 3であるから, $y=2x^2+ax+b$ は,

$y=2(x-1)(x-3)$ と因数分解できる。展開すると, $y=2x^2-8x+6$ となるから,

係数を比較して, $a=-8$, $b=6$ 答

(4) $y=x^2+2x+a=(x+1)^2-1+a$ $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲で考えると,

この関数は, $x=-1$ で最小値$-1+a$ をとる。よって, $-1+a=2$

$a=3$ 答 また, このとき $y=x^2+2x+3$ は $x=1$ で最大値をとるから,

最大値は, $1^2+2+a=6$ 答

$\boxed{2}$ xについての2次方程式 $3x^2+6x-a=0$ …①と, 1次不等式 $\dfrac{a-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$ …②がある。

ただし, a は実数の定数である。

(1) 方程式①が異なる2つの実数の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)(ｉ) $x=-1$ が不等式②を満たすような a の値の範囲を求めよ。

(ⅱ) $x=-2$ が不等式②を満たさないような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1), (2)(ｉ)をともに満たす整数 a に対して, 方程式①の解のうち, 不等式②を満たすものを求めよ。

解説

(1) 方程式①が異なる2つの実数解をもつことから, 判別式をD とおくと,

$D>0$ であればよい。$D/4=3^2-3(-a)=9+3a$ $D>0$ より, $a>-3$ 答

(2)(ｉ) $x=-1$ が不等式②の解であるから, これを代入すると,

$\dfrac{a-(-1)}{2}<2\cdot(-1)+\dfrac{5}{2}$ これを解いて, $a<0$ 答

(ⅱ) $x=-2$ が不等式②の解でないから, これを代入すると,

$\dfrac{a-(-2)}{2}\geqq 2\cdot(-2)+\dfrac{5}{2}$ これを解いて, $a\geqq -5$ 答

(3) (1), (2)(ｉ)をともに満たす a の値の範囲は, $-3<a<0$

これを満たす整数は, $a=-2$, -1

ｉ) $a=-2$ のとき, 方程式①は $3x^2+6x+2=0$ となり, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

不等式②は $\dfrac{-2-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$ となり, $x>-\dfrac{7}{5}$ ここで,

$\dfrac{3}{2}<\sqrt{3}<2$ であるから, $-\dfrac{3}{2}<-3+\sqrt{3}<-1$ より, $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{1}{3}$

$-5<-3-\sqrt{3}<-\dfrac{9}{2}$ より, $-\dfrac{5}{3}<\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{3}{2}$

よって, $x>-\dfrac{7}{5}$ であるものは, $x=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$

ⅱ) $a=1$ のとき, 方程式①は $3x^2+6x+1=0$ となり, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$

不等式②は $\dfrac{-1-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$ となり, $x>-\dfrac{6}{5}$ ここで,

$2<\sqrt{6}<3$ であるから, $-1<-3+\sqrt{6}<0$ より, $-\dfrac{1}{3}<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}<0$

$-6<-3-\sqrt{6}<-5$ より, $-2<\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}<-\dfrac{5}{3}$

よって, $x>-\dfrac{6}{5}$ であるものは, $x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

したがって, ｉ), ⅱ)より, $x=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 答

$\boxed{3}$ 2次関数 $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5$ がある。ただし, a, b は定数で $a\neq 0$ とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 (1, 2) を通るとき, $0\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての x に対し, $f(x)\geqq 0$ であるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $a=\dfrac{1}{2}$, $b>2$ とする。点O (0, 0), A ($2b$, 0), B (0, 21), O (b, 21) に対し, $y=f(x)$ のグラフが平行な2本の線分OA, BC (ただし, 両端の点を含む)のいずれとも共有点をもたないとき, b のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

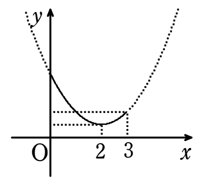
(1) $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5=a(x-2)^2+b-5$

よって, $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は (2, $b-5$) 答

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 (1, 2) を通るから, $f(1)=2$

よって, $a-4a+4a+b-5=2$ $b=7-a$

このとき, $f(x)=a(x-2)^2-a+2$

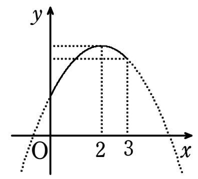


ｉ) $a>0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり, $0\leqq x\leqq 3$ の範囲では右図のようになる。

この範囲で, $f(x)$ は $x=2$ で最小値 $f(2)=-a+2$ をとる。

ゆえに, $-a+2\geqq 0$ $a\leqq 2$

$a>0$ より, $0<a\leqq 2$



ⅱ) $a<0$ のとき, $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり, $0\leqq x\leqq 3$ の範囲では右図のようになる。

この範囲で, $f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=3a+2$ をとる。

ゆえに, $3a+2\geqq 0$ $a\geqq -\dfrac{2}{3}$

$a<0$ より, $-\dfrac{2}{3}\leqq a<0$

したがって, ｉ), ⅱ)より, $-\dfrac{2}{3}\leqq a<0$, $0<a\leqq 2$ 答

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ より, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+b-3=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+b-5$

$b>2$ であるから, $y=f(x)$ のグラフと2つの線分OA, BCの位置関係は, 次の3つの場合が考えられる。

図1

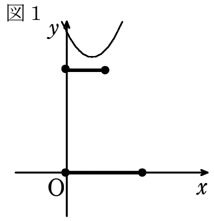


図2

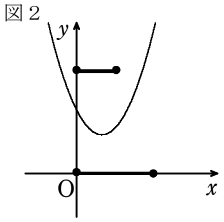
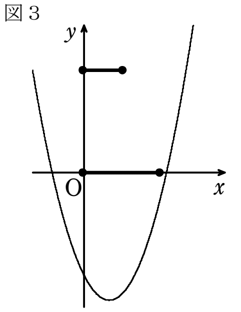


図3



ｉ) グラフが図1のようになるとき,

関数$f(x)$ は$0\leqq x\leqq b$ の範囲で, $x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから, $b-5>21$ $b>26$

$b>2$ より, $b>26$

ⅱ) グラフが図2のようになるとき,

関数$f(x)$ は$0\leqq x\leqq 2b$ の範囲で, $x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから,

$f(0)=b-3<21$ …①, $f(2)=b-5>0$ …②, $f(b)=\dfrac{1}{2}b^2-b-3<21$ …③

①より, $b<24$ ②より, $b>5$ ③より, $b^2-2b-48<0$ $(b+6)(b-8)<0$

$-6<b<8$ $b>2$ であるから, これらをともに満たす b の値の範囲は, $5<b<8$

ⅲ) グラフが図3のようになるとき,

関数$f(x)$ は$0\leqq x\leqq 2b$ の範囲で, $x=2b$ のとき最大値 $2b^2-3b-3$ をとるから,

$2b^2-3b-3<0$ より, $\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$

$b>2$ より, $2<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$

したがって, ｉ), ⅱ), ⅲ)より, $2<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$, $5<b<8$, $26<b$ 答