

1 次の□を正しく埋めよ。

- (1) $(a+b+3)(a+b-3)$ を展開し整理すると□(ア)となる。
- (2) $a=\sqrt{2}-1$ のとき、 $a+\frac{1}{a}=\square(イ)$ 、 $a^2+\frac{1}{a^2}=\square(ウ)$ である。
- (3) $y=2x^2+ax+b$ (a, b は定数)のグラフが2点(1, 0)と(3, 0)を通るとき、 $a=\square(エ)$ 、 $b=\square(オ)$ である。
- (4) $-2\leq x\leq 1$ における $y=x^2+2x+a$ (a は定数)の最小値は2である。
このとき、 $a=\square(カ)$ であり、最大値は□(キ)である。

解説

(1) 与式 $=(a+b)^2-3^2=a^2+2ab+b^2-9$ 罫

(2) $a=\sqrt{2}-1$ のとき、 $a+\frac{1}{a}=(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1+\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$ 罫

また、 $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=(2\sqrt{2})^2-2=6$ 罫

(3) $y=2x^2+ax+b$ のグラフが2点(1, 0)と(3, 0)を通るので、式に代入して、 $0=2+a+b, 0=18+3a+b$ これらを解くと、 $a=-8, b=6$ 罫

別解 グラフのx切片が1, 3であるから、 $y=2x^2+ax+b$ は、 $y=2(x-1)(x-3)$ と因数分解できる。展開すると、 $y=2x^2-8x+6$ となるから、係数を比較して、 $a=-8, b=6$ 罫

(4) $y=x^2+2x+a=(x+1)^2-1+a$ $-2\leq x\leq 1$ の範囲で考えると、この関数は、 $x=-1$ で最小値 $-1+a$ をとる。よって、 $-1+a=2$
 $a=3$ 罫 また、このとき $y=x^2+2x+3$ は $x=1$ で最大値をとるから、最大値は、 $1^2+2+a=6$ 罫

2 xについての2次方程式 $3x^2+6x-a=0$ …①と、1次不等式 $\frac{a-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$ …②がある。

ただし、 a は実数の定数である。

- (1) 方程式①が異なる2つの実数の解をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (2)(i) $x=-1$ が不等式②を満たすような a の値の範囲を求めよ。
(ii) $x=-2$ が不等式②を満たさないような a の値の範囲を求めよ。
- (3) (1), (2)(i)をともに満たす整数 a に対して、方程式①の解のうち、不等式②を満たすものを求めよ。

解説

(1) 方程式①が異なる2つの実数解をもつことから、判別式を D とおくと、 $D>0$ であればよい。 $D/4=3^2-3(-a)=9+3a$ $D>0$ より、 $a>-3$ 罫

(2)(i) $x=-1$ が不等式②の解であるから、これを代入すると、

$$\frac{a-(-1)}{2}<2\cdot(-1)+\frac{5}{2}$$

これを解いて、 $a<0$ 罫

(ii) $x=-2$ が不等式②の解でないから、これを代入すると、

$$\frac{a-(-2)}{2}\geq 2\cdot(-2)+\frac{5}{2}$$

これを解いて、 $a\geq-5$ 罫

(3) (1), (2)(i)をともに満たす a の値の範囲は、 $-3<a<0$
これを満たす整数は、 $a=-2, -1$

i) $a=-2$ のとき、方程式①は $3x^2+6x+2=0$ となり、 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

不等式②は $\frac{-2-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$ となり、 $x>-\frac{7}{5}$ ここで、

$$\frac{3}{2}<\sqrt{3}<2$$

であるから、 $-\frac{3}{2}<-3+\sqrt{3}<-1$ より、 $-\frac{1}{2}<\frac{-3+\sqrt{3}}{3}<-\frac{1}{3}$

$$-5<-3-\sqrt{3}<-\frac{9}{2}$$

より、 $-\frac{5}{3}<\frac{-3-\sqrt{3}}{3}<-\frac{3}{2}$

よって、 $x>-\frac{7}{5}$ であるものは、 $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$

ii) $a=1$ のとき、方程式①は $3x^2+6x+1=0$ となり、 $x=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$

不等式②は $\frac{-1-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$ となり、 $x>-\frac{6}{5}$ ここで、

$$2<\sqrt{6}<3$$

であるから、 $-1<-3+\sqrt{6}<0$ より、 $-\frac{1}{3}<\frac{-3+\sqrt{6}}{3}<0$

$$-6<-3-\sqrt{6}<-5$$

より、 $-2<\frac{-3-\sqrt{6}}{3}<-\frac{5}{3}$

よって、 $x>-\frac{6}{5}$ であるものは、 $x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$

したがって、i), ii)より、 $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}, x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 罫

3 2次関数 $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5$ がある。ただし、 a, b は定数で $a\neq 0$ とする。

- (1) $y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。
- (2) $y=f(x)$ のグラフが点(1, 2)を通るとき、 $0\leq x\leq 3$ を満たすすべての x に対し、 $f(x)\geq 0$ であるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $a=\frac{1}{2}, b>2$ とする。点O(0, 0), A(2b, 0), B(0, 21), C(b, 21)に対し、 $y=f(x)$ のグラフが平行な2本の線分OA, BC(ただし、両端の点を含む)のいずれとも共有点をもたないとき、 b のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

(1) $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5=a(x-2)^2+b-5$
よって、 $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は (2, $b-5$) 罫

(2) $y=f(x)$ のグラフが点(1, 2)を通るから、 $f(1)=2$
よって、 $a-4a+4a+b-5=2$ $b=7-a$

このとき、 $f(x)=a(x-2)^2-a+2$

i) $a>0$ のとき、 $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり、 $0\leq x\leq 3$ の範囲では右図のようになる。この範囲で、 $f(x)$ は $x=2$ で最小値 $f(2)=-a+2$ をとる。ゆえに、 $-a+2\geq 0$ $a\leq 2$
 $a>0$ より、 $0<a\leq 2$

ii) $a<0$ のとき、 $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり、 $0\leq x\leq 3$ の範囲では右図のようになる。この範囲で、 $f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=3a+2$ をとる。ゆえに、 $3a+2\geq 0$ $a\geq-\frac{2}{3}$

$a<0$ より、 $-\frac{2}{3}\leq a<0$

したがって、i), ii)より、 $-\frac{2}{3}\leq a<0, 0<a\leq 2$ 罫

(3) $a=\frac{1}{2}$ より、 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+b-3=\frac{1}{2}(x-2)^2+b-5$

$b>2$ であるから、 $y=f(x)$ のグラフと2つの線分OA, BCの位置関係は、次の3つの場合が考えられる。

図1

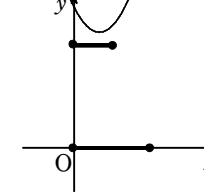


図2

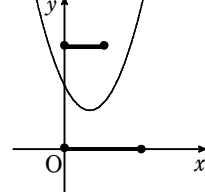
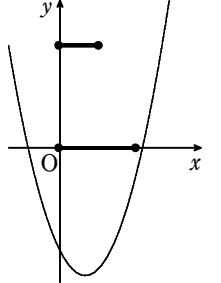


図3



i) グラフが図1のようになるとき、関数 $f(x)$ は $0\leq x\leq b$ の範囲で、 $x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから、 $b-5>21$ $b>26$
 $b>2$ より、 $b>26$

ii) グラフが図2のようになるとき、関数 $f(x)$ は $0\leq x\leq 2b$ の範囲で、 $x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから、 $f(0)=b-3<21$ …①、 $f(2)=b-5>0$ …②、 $f(b)=\frac{1}{2}b^2-b-3<21$ …③

①より、 $b<24$ ②より、 $b>5$ ③より、 $b^2-2b-48<0$ $(b+6)(b-8)<0$
 $-6<b<8$ $b>2$ であるから、これらをともに満たす b の値の範囲は、 $5<b<8$

iii) グラフが図3のようになるとき、関数 $f(x)$ は $0\leq x\leq 2b$ の範囲で、 $x=2b$ のとき最大値 $2b^2-3b-3$ をとるから、

$$2b^2-3b-3<0$$

より、 $\frac{3-\sqrt{33}}{4}<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

$b>2$ より、 $2<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

したがって、i), ii), iii)より、 $2<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4}, 5<b<8, 26<b$ 罫