$\boxed{1}$ [2003センター]

$y=-2x^2+ax+b=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+b$

よって，C は頂点の座標が $\left(\frac{a}{{}^{\text{ア}}4},\ \frac{a^2}{{}^{\text{イ}}8}+b\right)$ の放物線である．

C が点 $(3,\ -8)$ を通るとき　$-8=-2\cdot3^2+a\cdot3+b$

すなわち　$b={}^{\text{ウエ}}-3a+10$　が成り立つ．

(1)　C が x 軸と接するとき，頂点の y 座標が 0 である．

よって　$\frac{a^2}{8}+b=0$

$b=-3a+10$ であるから　$\frac{a^2}{8}-3a+10=0$

すなわち　$a^2-24a+80=0$

ゆえに　$(a-4)(a-20)=0$

したがって　$a={}^{\text{オ}}4$　または　$a={}^{\text{カキ}}20$

$a=20$ のとき，C の頂点の座標は　$(5,\ 0)$

$a=4$　のとき，C の頂点の座標は　$(1,\ 0)$

$5-1=4$ であるから，x 軸方向に ${}^{\text{ク}}4$ だけ平行移動したものである．

(2)　C の頂点の y 座標は　$\frac{a^2}{8}+b$

$b=-3a+10$ であるから

$\frac{a^2}{8}+b=\frac{a^2}{8}-3a+10=\frac{1}{8}(a-12)^2-8$

よって，$a={}^{\text{ケコ}}12$ のとき最小値 ${}^{\text{サシ}}-8$ をとる．

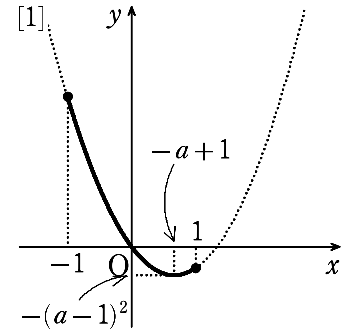
$\boxed{2}$ [2003センター]

$y=x^2+2(a-1)x=\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2$

よって，C は頂点の座標が $({}^{\text{ア}}-a+{}^{\text{イ}}1,\ {}^{\text{ウ}}-(a-{}^{\text{エ}}1)^2)$ の放物線である．

(1)　[1]　$-1\leqq x\leqq1$ において，最小値が $-(a-1)^2$ となる条件は　$-1\leqq-a+1\leqq1$

すなわち　${}^{\text{オ}}0\leqq a\leqq{}^{\text{カ}}2$



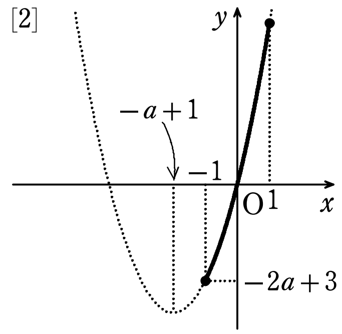
[2]　$a>2$ ならば，C の軸 $x=-a+1$ は $-1\leqq x\leqq1$ の左外にある．

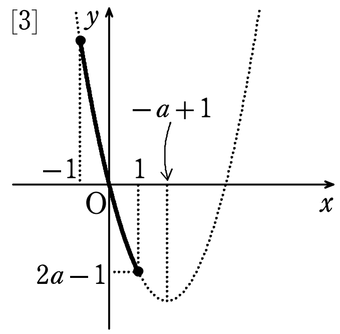
すなわち，① は $x=-1$ のとき最小となり，その最小値は

$(-1)^2+2(a-1)\cdot(-1)={}^{\text{キク}}-2a+{}^{\text{ケ}}3$

[3]　$a<0$ ならば，C の軸 $x=-a+1$ は $-1\leqq x\leqq1$ の右外にある．

すなわち，① は $x=1$ のとき最小となり，その最小値は　$1^2+2(a-1)\cdot1={}^{\text{コ}}2a-{}^{\text{サ}}1$





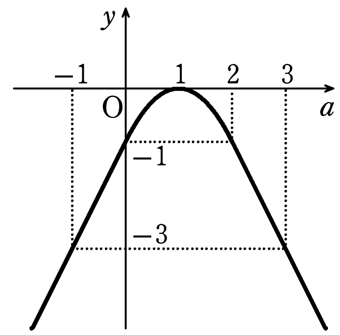
$a<0$ のとき　$y=2a-1$

$0\leqq a\leqq2$ のとき　$y=-(a-1)^2$

$2<a$ のとき　$y=-2a+3$

この関数のグラフをかくと，右の図のようになる．

よって，この関数は $a={}^{\text{シ}}1$ のとき最大となる．



(2)　C の頂点 $(-a+1,\ -(a-1)^2)$ を y 軸方向に b だけ平行移動すると　$(-a+1,\ -(a-1)^2+b)$

これが直線 $y=x+2$ 上にあるとき

$$-(a-1)^2+b=-a+1+2$$

すなわち　$b=a^2-{}^{\text{ス}}3a+{}^{\text{セ}}4$　……②

また　$b=a^2-3a+4=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

よって，② を満たす実数 a は $b\geqq\frac{{}^{\text{ソ}}7}{{}^{\text{タ}}4}$ のときは存在するが，$b<\frac{7}{4}$ のときは存在しない．

$\boxed{3}$ [2002センター]

(1)　C が点 $(1,\ -4)$ を通るから　$-4=-4\cdot1^2+4(a-1)\cdot1-a^2$

すなわち　$a^2-4a+4=0$　　よって　$(a-2)^2=0$　　ゆえに　$a={}^{\text{ア}}2$

(2)　$y=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ を変形すると　$y=-4\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-2a+1$

よって，C の頂点の座標は　$\left(\dfrac{a-1}{{}^{\text{イ}}2},\ {}^{\text{ウエ}}-2a+{}^{\text{オ}}1\right)$

(3)　$f(x)=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ とおく．

C は軸の方程式が $x=\dfrac{a-1}{2}$ で，上に凸な放物線である．

$a>1$ であるから　$\dfrac{a-1}{2}>0$

最大値は　[1]　$0<\dfrac{a-1}{2}\leqq1$ のとき　$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$

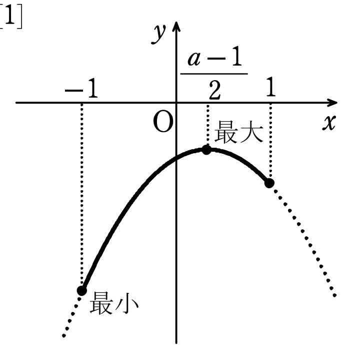
[2]　$\dfrac{a-1}{2}>1$ のとき　$f(1)$　　　である．

したがって，　[1]　$1<a\leqq{}^{\text{カ}}3$ ならば，最大値は　$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=-2a+{}^{\text{キ}}1$

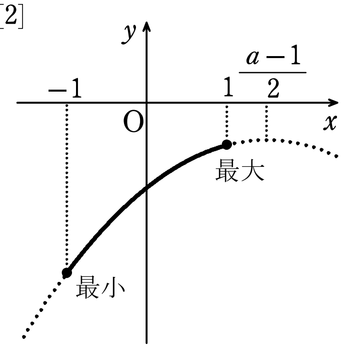
[2]　$a>{}^{\text{カ}}3$ ならば，最大値は　$f(1)=-4\cdot1^2+4(a-1)\cdot1-a^2$

$=-a^2+4a-{}^{\text{ク}}8$

[1]



[2]



また，最小値は　$f(-1)=-4\cdot(-1)^2+4(a-1)\cdot(-1)-a^2=-a^2-{}^{\text{ケ}}4a$

次に，最大値と最小値の差が 12 となる a の値を求める．

[1]　$1<a\leqq3$ のとき

$(-2a+1)-(-a^2-4a)=12$ から　$a^2+2a-11=0$

これを解くと　$a=-1\pm2\sqrt{3}$　　$1<a\leqq3$ から　$a=-1+2\sqrt{3}$

[2]　$a>3$ のとき

$(-a^2+4a-8)-(-a^2-4a)=12$ から　$a=\dfrac{5}{2}$

これは $a>3$ を満たさないから，不適である．

ゆえに　$a=-1+{}^{\text{コ}}2\sqrt{{}^{\text{サ}}3}$

$\boxed{4}$ [2002センター]

(A)，(B) を変形すると　　$y=a(x+1)^2+6$　……(A)′

$y=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+2b-6$　……(B)′

(1)　(A)′ から　$({}^{\text{アイ}}-1,\ {}^{\text{ウ}}6)$

(2)　(B)′ のグラフを x 軸方向へ 1，y 軸方向へ p 平行移動したグラフの方程式は

$y=\left(x+\dfrac{b}{2}-1\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+2b-6+p$

これが，(A)′ と一致するから　$a=1$，$1=\dfrac{b}{2}-1$，$6=-\dfrac{b^2}{4}+2b-6+p$

これを解くと　$a={}^{\text{エ}}1$，$b={}^{\text{オ}}4$，$p={}^{\text{カ}}8$

(3)　(A) のグラフが x 軸と 2 点 P，Q で交わるから，$ax^2+2ax+a+6=0$　…… ①

の判別式を D_1 とすると　$D_1>0$

よって　$\dfrac{D_1}{4}=a^2-a(a+6)>0$　　　ゆえに　$a<0$

また，このとき，① の解は　$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{-6a}}{a}$

$a<0$ であるから　$\mathrm{PQ}=\dfrac{-a-\sqrt{-6a}}{a}-\dfrac{-a+\sqrt{-6a}}{a}=-\dfrac{2\sqrt{-6a}}{a}$

$\mathrm{PQ}=2\sqrt{6}$ から　$-\dfrac{2\sqrt{-6a}}{a}=2\sqrt{6}$

(両辺)$\geqq0$ であるから，両辺を平方して整理すると　$-6a=6a^2$

$a\neq0$ より　$a={}^{\text{キク}}-1$　　これは $a<0$ を満たす．

また，(B) に関しても同様に，$x^2+bx+2b-6=0$　…… ② の判別式を D_2 とすると

$D_2=b^2-4(2b-6)>0$　　すなわち　$(b-4)^2+8>0$

これは任意の実数 b について成り立つ．

② の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-8b+24}}{2}$

よって　$\mathrm{RS}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-8b+24}}{2}-\dfrac{-b-\sqrt{b^2-8b+24}}{2}=\sqrt{b^2-8b+24}$

$\mathrm{RS}\leqq2\sqrt{6}$ から　$\sqrt{b^2-8b+24}\leqq2\sqrt{6}$

(両辺)$\geqq 0$ であるから，両辺を平方すると　$b^2-8b+24\leqq 24$

よって　${}^{ケ}0\leqq b\leqq {}^{コ}8$

また，$\mathrm{RS}=\sqrt{(b-4)^2+8}$ であるから，RSの長さの最小値は $b=4$ のとき　${}^{サ}2\sqrt{{}^{シ}2}$

$\boxed{5}$［2001センター］

(1)　① は　　$y=4(x-1)^2+1$

よって，C_1 の頂点の座標は　　$(1,\ 1)$ …… ③

また，C_2 の頂点の座標は　　$(-a,\ b)$ …… ④

③ と ④ が一致するとき　$a={}^{アイ}-1$，$b={}^{ウ}1$

(2)　① において $y=17$ とすると　$17=4x^2-8x+5$　　ゆえに　$x^2-2x-3=0$

よって　$(x+1)(x-3)=0$　　したがって　$x={}^{エオ}-1$，${}^{カ}3$

② についても，$y=17$ となる x の値が -1，3 であるとすると

$$17=-2(-1+a)^2+b \text{ …… ⑤}$$
$$17=-2(3+a)^2+b \text{ …… ⑥}$$

⑤，⑥ から　$(-1+a)^2=(3+a)^2$　　ゆえに　$a=-1$　⑤ から　$b=25$

よって，② は　$y=-2(x-1)^2+25$

したがって，C_2 の軸は直線 $x={}^{キ}1$ で，頂点の座標は $({}^{キ}1,\ {}^{クケ}25)$

(3)　C_1 を x 軸方向に c，y 軸方向に $-4c$ だけ平行移動した放物線 C_3 を表す 2 次関数は

$$y=4(x-1-c)^2+1-4c \text{ …… ⑦}$$

C_3 が y 軸と点 $(0,\ 4)$ で交わるならば

$$4=4(-1-c)^2+1-4c \qquad \text{整理すると}\quad 4c^2+4c+1=0$$

ゆえに　$c=\dfrac{{}^{コサ}-1}{{}^{シ}2}$　　このとき，⑦ は $y=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3$

この最小値は 3 であり，① の最小値は 1 であるから　$3-1={}^{ス}2$

$\boxed{6}$［2001センター］

$y=-2x^2-4x+a$ ……［A］

$y=(3b^2-8b-3)x^2+5$ ……［B］とおく．

(1)　［A］は　$y=-2(x+1)^2+a+2$

よって，C_1 の頂点の座標は $({}^{アイ}-1,\ a+{}^{ウ}2)$ である．

(2)　［B］において，$y=0$ とすると　$(3b^2-8b-3)x^2+5=0$

ゆえに　$x^2=\dfrac{-5}{3b^2-8b-3}$ ……［C］

求める条件は，［C］を満たす x の値が 2 つ存在することであるから

$\dfrac{-5}{3b^2-8b-3}>0$　　よって　$3b^2-8b-3<0$

ゆえに　$(3b+1)(b-3)<0$　　したがって　$\dfrac{{}^{エオ}-1}{{}^{カ}3}<b<{}^{キ}3$ …… ①

また，b が ① の範囲内の整数であるとき　$b=0,\ 1,\ 2$ …… ②

$\mathrm{AB}=2\sqrt{\dfrac{-5}{3b^2-8b-3}}$ であるから，② を代入すると

$b=0$ のとき　$\mathrm{AB}=2\sqrt{\dfrac{5}{3}}$，　$b=1$ のとき　$\mathrm{AB}=2\sqrt{\dfrac{5}{8}}$，

$b=2$ のとき　$\mathrm{AB}=2\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

よって，$b={}^{ク}1$ のとき AB は最小値 $2\sqrt{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{{}^{ケコ}10}}{2}$ をとる．

(3)　頂点 $(-1,\ a+2)$ が C_2 上にあるから，［B］より

$$a+2=(3b^2-8b-3)(-1)^2+5 \qquad \text{ゆえに}\quad a={}^{サ}3b^2-{}^{シ}8b$$

また，C_2 は y 軸に関して対称であるから，y 軸に関して $(-1,\ a+2)$ と対称な点 $(1,\ a+2)$ が頂点となるように C_1 を平行移動すればよい．

よって　$1-(-1)={}^{ス}2$

$\boxed{7}$［2001センター］

(1)　$y'=-x$

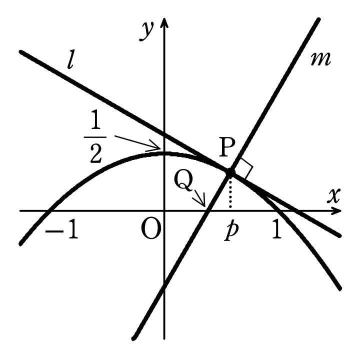
よって　$\mathrm{P}\left(p,\ -\dfrac{1}{2}p^2+\dfrac{1}{2}\right)$ …… ① における

接線 l の傾きは　${}^{ア}-p$

ゆえに，直線 m の方程式は

$$y=\frac{1}{p}(x-p)-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}$$

すなわち　$y=\dfrac{{}^{イ}1}{p}x-\dfrac{1}{{}^{ウ}2}(p^{{}^{エ}2}+1)$ …… ②



(2)　② において，$y=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2}p(p^2+1)$

よって　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}p(p^{{}^{キ}2}+{}^{ク}1),\ 0\right)$

$$\mathrm{PQ}^2=\left\{\frac{1}{2}p(p^2+1)-p\right\}^2+\left\{0-\left(-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}p(p^2-1)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(p^2-1)\right\}^2$$

$$=\frac{{}^{ケ}1}{{}^{コ}4}(p^2+{}^{サ}1)(p^2-{}^{シ}1)^2$$

(3)　$\mathrm{PQ}=\mathrm{OQ}$ となるとき

$$\sqrt{\frac{1}{4}(p^2+1)(p^2-1)^2}=\left|\frac{1}{2}p(p^2+1)\right|$$

両辺を 2 乗すると

$$\frac{1}{4}(p^2+1)(p^2-1)^2=\frac{1}{4}p^2(p^2+1)^2$$

ゆえに　$(p^2-1)^2=p^2(p^2+1)$

よって　$p=\dfrac{\sqrt{{}^{ス}3}}{{}^{セ}3}$

ゆえに，① から　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{{}^{ス}3}}{{}^{セ}3},\ \dfrac{{}^{ソ}1}{{}^{タ}3}\right)$

$\boxed{8}$ [2000センター]

$C:\ y=(a^2+1)x^2+(2a-3)x-3$ …… ①

(1)　グラフ C が点 $(-1,\ 0)$ を通るとき

$$0=(a^2+1)(-1)^2+(2a-3)(-1)-3$$

よって　$a^2-2a+1=0$

ゆえに　$(a-1)^2=0$

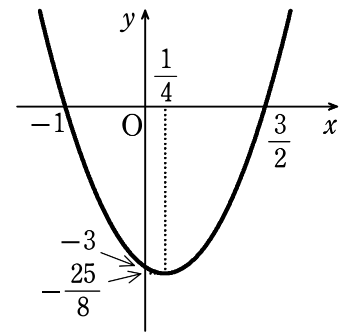
したがって　$a={}^{ア}1$

このとき，① は　$y=2x^2-x-3$ …… ②

$2x^2-x-3=0$ とすると　$(x+1)(2x-3)=0$

よって　$x=-1,\ \dfrac{3}{2}$

したがって，グラフ C と x 軸の交点は　$(-1,\ 0)$ と $\left(\dfrac{{}^{イ}3}{{}^{ウ}2},\ 0\right)$



また，② を変形すると　$y=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$

ゆえに，② のグラフは右の図のようになる．

よって，$0\leqq x\leqq 3$ のとき，② は

$x=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{エオカ}-25}{{}^{キ}8}$，

$x=3$ のとき最大値 ${}^{クケ}12$

をとる．

(2)　① において，$x=0$ とすると　$y=-3$

よって，グラフ C は点 $(0,\ -3)$ を通る．

また，$a^2+1>0$ であるから，グラフ C は下に凸である．

ゆえに，グラフ C が x 軸の $x\geqq 3$ の部分の 1 点を通るためには，① において

$x=3$ のとき　$y\leqq 0$

となればよい．

よって　$(a^2+1)\cdot 3^2+(2a-3)\cdot 3-3\leqq 0$

整理すると　$3a^2+2a-1\leqq 0$

ゆえに　$(a+1)(3a-1)\leqq 0$

したがって　${}^{コサ}-1\leqq a\leqq\dfrac{{}^{シ}1}{{}^{ス}3}$

$\boxed{9}$ [2000センター]

① を変形すると　$y=(a^2-3)\left(x-\dfrac{a}{a^2-3}\right)^2+4-\dfrac{a^2}{a^2-3}$ …… ②

(1)　グラフ C が上に凸であるから　$a^2-3<0$ …… ③

よって　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ …… ④

頂点の x 座標が負であるから　$\dfrac{a}{a^2-3}<0$ …… ⑤

③，⑤ から　$a>0$ …… ⑥

④，⑥ の共通範囲を求めて　${}^{ア}0<a<\sqrt{{}^{イ}3}$

(2)　$a=3$ のとき，② は　$y=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$

よって，C は $x=\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}$ を軸とする放物線であり，① の最小値は $\dfrac{{}^{オ}5}{{}^{カ}2}$ である．

(3)　$a=-1$ のとき，① は　$y=-2x^2+2x+4$

よって，C を x 軸方向，y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{n}$ だけ平行移動した放物線を表す２次関数は　$y-\dfrac{1}{n}=-2\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+2\left(x-\dfrac{1}{n}\right)+4$

すなわち　$y=-2x^2+\left(2+\dfrac{4}{n}\right)x+4-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}$

条件から，$2+\dfrac{4}{n}$，$4-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}$ が整数となる，すなわち $\dfrac{4}{n}$，$-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}$ が整数となるような n の値を求めればよい．

$\dfrac{4}{n}$ が整数となるのは $n=\pm1$，±2，±4 のときであり，このうち，$-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}$ が整数となるのは $n=\pm{}^{キ}1$，$\pm{}^{ク}2$ のときである．

(または $n=\pm{}^{キ}2$，$\pm{}^{ク}1$ のとき)

$\boxed{10}$ [1999センター]

$x^2-4ax+4a^2-4a-3b+9=(x-2a)^2-4a-3b+9$　であるから，求める頂点の座標は　$({}^{ア}2a,\ -{}^{イ}4a-{}^{ウ}3b+{}^{エ}9)$

(1)　グラフ C は下に凸であるから　$-4a-3b+9>0$ のとき，x 軸と交わらない．

これを満たす自然数 a，b は $a={}^{オ}1$，$b={}^{カ}1$ に限る．

(2)　与式から　$x=2a\pm\sqrt{4a+3b-9}$　　　よって　$2\sqrt{4a+3b-9}=2\sqrt{11}$

ゆえに　$4a+3b-9=11$　から　$4a+3b={}^{キク}20$

これを満たす自然数 a，b は　$a={}^{ケ}2$，$b={}^{コ}4$

(3)　放物線 $y=-x^2+8x+1$ を，x 軸に関して対称移動すると　$y=x^2-8x-1$

更に，このグラフを y 軸方向に３だけ平行移動すると　$y=x^2-8x+2$

これが，グラフ C と等しいから　$4a=8$，$4a^2-4a-3b+9=2$

ゆえに　$a={}^{サ}2$，$b={}^{シ}5$

$\boxed{11}$ [1999センター]

$ax^2+bx-a^2+12a+12=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}-a^2+12a+12$

$x=4$ で最大値をとるから　$-\dfrac{b}{2a}=4$，$a<0$

ゆえに　$b=-{}^{ア}8a$ であるから，与式は　$y=ax^2-8ax-a^2+12a+12$

(1)　$y=a(x-4)^2-a^2-4a+12$ …… ① の最大値が７であるから　$-a^2-4a+12=7$

ゆえに　$(a+5)(a-1)=0$　　$a<0$ から　$a={}^{イウ}-5$

このとき ① より　$y=-5(x-4)^2+7$　であるから，C と x 軸との交点の x 座標は $-5(x-4)^2+7=0$ の解．

よって　$x=4\pm\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

また，C の頂点の y 座標は，条件より７であるから，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(4+\frac{\sqrt{35}}{5}\right)-\left(4-\frac{\sqrt{35}}{5}\right)\right\}\cdot7=\frac{{}^{エ}7\sqrt{{}^{オカ}35}}{{}^{キ}5}$$

(2)　C が点 $(3,\ 8)$ を通るとき，① から　$8=a(3-4)^2-a^2-4a+12$

よって　$a^2+3a-4=0$　　$a<0$ から　$a=-{}^{ク}4$

このとき ① から　$y=-4(x-4)^2+12$

この関数のグラフの頂点の座標は　$(4,\ 12)$

ゆえに，求める頂点の座標は　$({}^{ケコ}-4,\ {}^{サシ}12)$

$\boxed{12}$ [1999センター]

(1)　$3x^2=-2x+1$ から　$(x+1)(3x-1)=0$　　　ゆえに　${}^{アイ}-1$，$\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}3}$

(2)　点 P は C_1，C_2 上の点であるから　$v=3u^2$ …… ①　　$v=-u^2+au+b$ …… ②

点 P における C_1 と C_2 の接線が一致するから　$6u=-2u+a$ …… ③

①，②，③ から　$u=\dfrac{{}^{オ}1}{{}^{カ}8}a$，$v=\dfrac{{}^{キ}3}{{}^{クケ}64}a^2$，$b=-\dfrac{1}{{}^{コサ}16}a^{{}^{シ}2}$

よって，C_2 を表す関数を a を用いて表すと　$y=-x^2+ax-\dfrac{1}{16}a^2$

l が C_2 の接線ならば　$-x^2+ax-\dfrac{1}{16}a^2=-2x+1$

すなわち　$16x^2-16(a+2)x+a^2+16=0$ の判別式 D について　$D=0$

よって　$8^2(a+2)^2-16(a^2+16)=0$

ゆえに　$3a^2+16a=0$　$a \geqq 0$ から　$a={}^{ス}0$

このとき　$b={}^{セ}0$ となり，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+2}{2},\ -2\cdot\dfrac{a+2}{2}+1\right)$ から　$\mathrm{Q}\left({}^{ソ}1,\ {}^{タチ}-1\right)$

(3)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1}\{-2x+1-(-x^2)\}dx=\frac{{}^{ツ}8}{{}^{テト}81}$

$\boxed{13}$ [1998センター]

(1)　$x^2+ax+a-4=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3$ であるから，求める y 座標は

$$-\left(\frac{a-{}^{ア}2}{{}^{イ}2}\right)^2-{}^{ウ}3$$

また，方程式 ② の解は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4a+16}}{2}$ であるから

$$(\alpha-\beta)^2=\left(\sqrt{a^2-4a+16}\right)^2=a^2-4a+16$$

ゆえに　$a^2-4a+16<28$　　　これを解いて　${}^{エオ}-2<a<{}^{カ}6$

(2)　① から　$a(x+1)+x^2-4-y=0$

この方程式が a の恒等式となるのは $x+1=0$ かつ $x^2-4-y=0$ のとき.

これを解いて　$x=-1,\ y=-3$　　　ゆえに　$(-{}^{キ}1,\ -{}^{ク}3)$

また，① の頂点の座標は　$\left(-\dfrac{a}{2},\ -\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3\right)$

よって，$x=-\dfrac{a}{2},\ y=-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3$ として，a を消去すると　$y=-x^2-{}^{ケ}2x-{}^{コ}4$

(3)　③ の頂点の座標は $(-1,\ -3)$ であるから $-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3=-3$ が成り立てばよい.

ゆえに　$a={}^{サ}2$

$\boxed{14}$ [1998センター]

(1)　$y=2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$

よって，頂点の座標は $\left(\dfrac{{}^{ア}3}{{}^{イ}4},\ \dfrac{{}^{ウ}7}{{}^{エ}8}\right)$ である.

放物線 ① を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -4 だけ平行移動すると

$y-(-4)=2(x-1)^2-3(x-1)+2$ から　$y=2x^2-{}^{オ}7x+{}^{カ}3$ である.

(2)　$-2x^2+k=0$ とおくと，$k>\dfrac{1}{2}$ から　$x=\pm\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

また，$\mathrm{P}(a,0),\ \mathrm{P}'(-a,0),\ \mathrm{Q}(a,\ -2a^2+k)$ であるから

$$l=2\mathrm{PP}'+2\mathrm{PQ}=2\cdot2a+2(-2a^2+k)=-{}^{キ}4a^2+{}^{ク}4a+{}^{ケ}2k=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+2k+1$$

$0<a<\sqrt{\dfrac{k}{2}},\ k>\dfrac{1}{2}$ から，$a=\dfrac{{}^{コ}1}{{}^{サ}2}$ のとき l は最大となり　$m={}^{シ}2k+{}^{ス}1$

$k^2-\dfrac{1}{4}<m$ から　$k^2-\dfrac{1}{4}<2k+1$　　　よって　$\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left(k-\dfrac{5}{2}\right)<0$

$k>\dfrac{1}{2}$ から　$\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{5}{2}$

k は整数であるから　$k={}^{セ}1,\ {}^{ソ}2$

$\boxed{15}$ [1997センター]

$C:\ y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ が 2 点 $(0,4)$ と $(2,k)$ を通るから

$4=b,\ k=\dfrac{9}{4}\cdot2^2+a\cdot2+b=2a+13$　ゆえに　$a=\dfrac{k-{}^{アイ}13}{{}^{ウ}2},\ b={}^{エ}4$

よって　$C:\ y=\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4$

(1)　$\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4=\dfrac{9}{4}\left(x+\dfrac{k-13}{9}\right)^2-\dfrac{(k-13)^2}{36}+4$ であるから，

C が x 軸と接するとき　$-\dfrac{(k-13)^2}{36}+4=0$ から　$k-13=\pm12$

ゆえに　$k={}^{オ}1,\ {}^{カキ}25$

また，接点の x 座標は　$-\dfrac{k-13}{9}$ であるから

$k=1$ のとき $\dfrac{{}^{ク}4}{{}^{ケ}3}$，$k=25$ のとき $\dfrac{{}^{コサ}-4}{{}^{シ}3}$

(2) $\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4=0$ とすると　$9x^2+2(k-13)x+16=0$

ゆえに　$x=\dfrac{-(k-13)\pm\sqrt{(k-13)^2-9\cdot16}}{9}=\dfrac{-(k-13)\pm\sqrt{k^2-26k+25}}{9}$

条件から　$\dfrac{-(k-13)+\sqrt{k^2-26k+25}}{9}-\dfrac{-(k-13)-\sqrt{k^2-26k+25}}{9}\geqq 2$

よって　$\sqrt{k^2-26k+25}\geqq 9$　　ゆえに　$k^2-26k-56\geqq 0$ から　$(k+2)(k-28)\geqq 0$

ゆえに　$k\leqq {}^{\text{スセ}}-2,\ {}^{\text{ソタ}}28\leqq k$

$\boxed{16}$ [1997センター]

(1) 関数 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると

$y+3=2(x-1)^2$

よって　$y=2x^2-4x-1$

これを x 軸に関して対称移動すると　$y=-(2x^2-4x-1)$

ゆえに　$y=-2x^2+4x+1$

よって　$a={}^{\text{アイ}}-2$，$b={}^{\text{ウ}}4$，$c={}^{\text{エ}}1$

(2) 頂点の座標が $(3,\ -8)$ であるから　$y=p(x-3)^2-8$

すなわち　$y=px^2-6px+9p-8$　……①

これが $y=px^2+qx+r$ と一致するから

$q={}^{\text{オカ}}-6p$，$r={}^{\text{キ}}9p-{}^{\text{ク}}8$

$y<0$ となる x の範囲が $k<x<k+4$ であるとする．

このとき，① のグラフは下に凸であるから　$p>0$

また，① のグラフの頂点の x 座標が 3 であるから

$\dfrac{k+(k+4)}{2}=3$

よって　$k={}^{\text{ケ}}1$

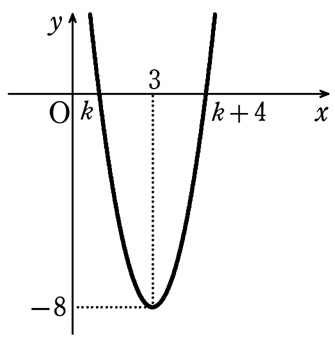
したがって，2 次方程式 $px^2-6px+9p-8=0$ が

$x=1$，5 を解にもつことから

$p-6p+9p-8=0$，$25p-30p+9p-8=0$

ゆえに　$p={}^{\text{コ}}2$

これは，$p>0$ を満たしている．



$\boxed{17}$ [2006センター]

① で $y\leqq 0$ とすると　$6x^2+11x-10\leqq 0$　　すなわち　$(2x+5)(3x-2)\leqq 0$

よって　$\dfrac{{}^{\text{アイ}}-5}{{}^{\text{ウ}}2}\leqq x\leqq\dfrac{{}^{\text{エ}}2}{{}^{\text{オ}}3}$

グラフ G を表す 2 次関数は　$y-b=6(x-a)^2+11(x-a)-10$

すなわち　$y=6x^2-(12a-11)x+6a^2-11a-10+b$　……(A)

G が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき　$0=6\cdot0^2-(12a-11)\cdot0+6a^2-11a-10+b$

よって　$b={}^{\text{カキ}}-6a^2+{}^{\text{クケ}}11a+{}^{\text{コサ}}10$

このとき，(A) は　$y={}^{\text{シ}}6x^2-({}^{\text{スセ}}12a-{}^{\text{ソタ}}11)x$　……②

$f(x)=6x^2-(12a-11)x$ とし，$f(-2)=f(3)$ とすると

$24+2(12a-11)=54-3(12a-11)$

よって　$12a-11=6$　　ゆえに　$a=\dfrac{{}^{\text{チツ}}17}{{}^{\text{テト}}12}$

このとき，② は　$y=6x^2-6x$

これを変形すると　$y=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

したがって，$-2\leqq x\leqq 3$ において，y は

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{\text{ナニ}}-3}{{}^{\text{ヌ}}2}$，　$x=-2$，3 のとき最大値 ${}^{\text{ネノ}}36$ をとる。

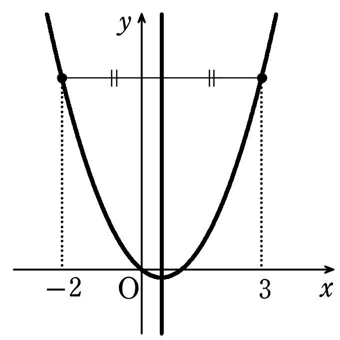
別解　$\left[\dfrac{{}^{\text{チツ}}\boxed{}}{{}^{\text{テト}}\boxed{}}\right.$ に入る数の求め方$\left.\right]$

放物線は軸に関して対称であるから，$x=-2$ と $x=3$ に対応する 2 次関数 ② の値が等しいとき，軸の方程式は　$x=\dfrac{-2+3}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2}$　となる。

また，② の軸の方程式は

$x=\dfrac{12a-11}{2\cdot6}$　すなわち　$x=\dfrac{12a-11}{12}$

よって　$\dfrac{12a-11}{12}=\dfrac{1}{2}$　　これを解くと　$a=\dfrac{{}^{\text{チツ}}17}{{}^{\text{テト}}12}$



$\boxed{18}$ [2006センター]

$x^2+mx+3m-5>0$ がすべての実数 x に対して成り立つための条件は

$$D=m^2-4\cdot1\cdot(3m-5)<0$$

よって　$m^2-{}^{\text{アイ}}12m+{}^{\text{ウエ}}20<0$　　すなわち　$(m-2)(m-10)<0$

したがって　${}^{\text{オ}}2<m<{}^{\text{カキ}}10$

$\boxed{19}$ [2006センター]

(1)　① から　$\dfrac{p+1}{q+3}=\dfrac{2}{5}$

$1\leqq p\leqq10$，$1\leqq q\leqq10$ のとき　$2\leqq p+1\leqq11$，$4\leqq q+3\leqq13$

よって　$(p+1,\ q+3)=(2,\ 5),\ (4,\ 10)$　　ゆえに　$(p,\ q)=(1,\ 2),\ (3,\ 7)$

したがって，求める p，q は $p={}^{\text{ア}}1$，$q={}^{\text{イ}}2$ および $p={}^{\text{ウ}}3$，$q={}^{\text{エ}}7$ である。

(2)　p，q が ① を満たすとき　$\dfrac{p+1}{q+3}=\dfrac{2}{5}$　…… ②

この左辺の分子に 2 を加えたときにも ② が成り立つためには，分母に 5 を加えればよい。

したがって，p，q が ① を満たすとき，$p'=p+2$，$q'=q+{}^{\text{オ}}5$ についても

$\dfrac{p'+1}{q'+3}=0.4$ となる。

(3)　(1)，(2) から，① を満たす自然数 p，q は

$$p=1+2n,\ q=2+5n\quad(n \text{ は 0 以上の整数})$$

と表される。

このとき　$p+q=7n+3$

$p+q<30$ とすると　$7n+3<30$　　よって　$n<\dfrac{27}{7}=3.8\cdots\cdots$

これを満たす最大の n は　$n=3$

よって，求める $p+q$ の最大値は　$7\cdot3+3={}^{\text{カキ}}24$

$\boxed{20}$ [2006センター]

① で $y\leqq0$ とすると　$6x^2+11x-10\leqq0$　　すなわち　$(2x+5)(3x-2)\leqq0$

よって　$\dfrac{{}^{\text{アイ}}-5}{{}^{\text{ウ}}2}\leqq x\leqq\dfrac{{}^{\text{エ}}2}{{}^{\text{オ}}3}$

グラフ G を表す 2 次関数は　$y-b=6(x-a)^2+11(x-a)-10$

すなわち　$y=6x^2-(12a-11)x+6a^2-11a-10+b$　…… (A)

G が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき　$0=6\cdot0^2-(12a-11)\cdot0+6a^2-11a-10+b$

よって　$b={}^{\text{カキ}}-6a^2+{}^{\text{クケ}}11a+{}^{\text{コサ}}10$

このとき，(A) は　$y={}^{\text{シ}}6x^2-({}^{\text{スセ}}12a-{}^{\text{ソタ}}11)x$　…… ②

$f(x)=6x^2-(12a-11)x$ とし，$f(-2)=f(3)$ とすると

$$24+2(12a-11)=54-3(12a-11)$$

よって　$12a-11=6$　　ゆえに　$a=\dfrac{{}^{\text{チツ}}17}{{}^{\text{テト}}12}$

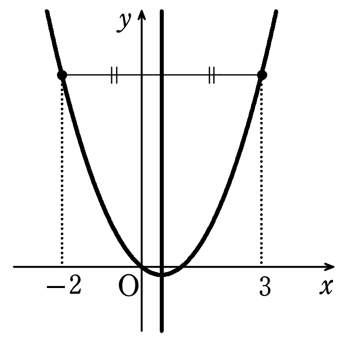
このとき，② は　$y=6x^2-6x$

これを変形すると　$y=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

したがって，$-2\leqq x\leqq3$ において，y は

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{\text{ナニ}}-3}{{}^{\text{ヌ}}2}$，　$x=-2,\ 3$ のとき最大値 ${}^{\text{ネノ}}36$ をとる。

別解　$\left[\dfrac{{}^{\text{チツ}}\boxed{}}{{}^{\text{テト}}\boxed{}}\right.$ に入る数の求め方$\left.\right]$



放物線は軸に関して対称であるから，$x=-2$ と $x=3$ に対応する 2 次関数 ② の値が等しいとき，軸の方程式は　$x=\dfrac{-2+3}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2}$　となる。

また，② の軸の方程式は

$x=\dfrac{12a-11}{2\cdot6}$　すなわち　$x=\dfrac{12a-11}{12}$

よって　$\dfrac{12a-11}{12}=\dfrac{1}{2}$　　これを解くと　$a=\dfrac{{}^{\text{チツ}}17}{{}^{\text{テト}}12}$

$\boxed{21}$ [2005センター]

$G:\ y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$　…… ①

(1)　$Y=0^2-2(a+2)\cdot0+a^2-a+1=a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

よって，Y の値が最小になるのは $a=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}$ のときで，最小値は $\dfrac{{}^{ウ}3}{{}^{エ}4}$ である。

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，① は　　$y=x^2-5x+\dfrac{3}{4}$

ゆえに，G と x 軸との交点の x 座標は，方程式 $x^2-5x+\dfrac{3}{4}=0$ の解で，これを解くと

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot\frac{3}{4}}}{2\cdot1}=\frac{{}^{オ}5\pm\sqrt{{}^{カキ}22}}{{}^{ク}2}$$

(2)　G が y 軸に関して対称になるのは，G の軸が y 軸になるときである。

① を変形すると

$$y=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1=\{x-(a+2)\}^2-5a-3 \quad \cdots\cdots ②$$

よって，G の軸は直線 $x=a+2$ で，これが y 軸と一致するとき　　$a+2=0$

ゆえに　$a=-{}^{ケ}2$

これを ② に代入して　　$y=x^2+7$

この関数のグラフが G_1 である。

G が x 軸に接するのは，G の頂点の y 座標が 0 になるときである。

② より，G の頂点の y 座標は $-5a-3$ であるから

$-5a-3=0$　　ゆえに　$a=-\dfrac{{}^{コ}3}{{}^{サ}5}$

これを ② に代入して　　$y=\left(x-\dfrac{7}{5}\right)^2$

この関数のグラフが G_2 である。

G_1 の頂点は　$(0,\ 7)$，　G_2 の頂点は　$\left(\dfrac{7}{5},\ 0\right)$

G_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動し，G_2 に重なるとすると

$$0+p=\frac{7}{5},\quad 7+q=0$$

よって　　$p=\dfrac{{}^{シ}7}{{}^{ス}5}$，$q={}^{セソ}-7$

$\boxed{22}$ [2005センター]

a，b のとりうる値は，ともに　1，2，3，4，5，6

(1)　2 次関数 $y=x^2-\dfrac{b-2}{a}$ のグラフは下に凸で，頂点の座標は　$\left(0,\ -\dfrac{b-2}{a}\right)$

[1]　C と x 軸との共有点の個数が 0 個であるのは，$-\dfrac{b-2}{a}>0$ のときである。

両辺に $a\,(>0)$ を掛けて　　$-b+2>0$　　すなわち　　$b<2$

ゆえに　　$b=1$

よって，共有点の個数が 0 個である確率は　$\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}6}$

[2]　C と x 軸との共有点の個数が 1 個であるのは，$-\dfrac{b-2}{a}=0$ すなわち $b=2$ のときである。

よって，共有点の個数が 1 個である確率は　$\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}6}$

[3]　C と x 軸との共有点の個数が 2 個であるのは，$-\dfrac{b-2}{a}<0$ のときである。

両辺に $a\,(>0)$ を掛けて整理すると　　$b>2$

ゆえに　　$b=3,\ 4,\ 5,\ 6$

よって，共有点の個数が 2 個である確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{{}^{オ}2}{{}^{カ}3}$

(2)　(1) から，共有点の個数の期待値は　$0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{{}^{キ}3}{{}^{ク}2}$

(3)　(1) から，C と x 軸が共有点をもつのは，b の値が 2，3，4，5，6 のいずれかになる場合である。

このとき，C と x 軸との共有点の x 座標は，方程式 $x^2-\dfrac{b-2}{a}=0$ を解いて

$$x=\pm\sqrt{\frac{b-2}{a}}$$

$\sqrt{\dfrac{b-2}{a}}$ が整数となる $(a,\ b)$ (ただし $b\geqq2$) は

(1，2)，(1，3)，(1，6)，(2，2)，(2，4)，(3，2)，(3，5)，(4，2)，(4，6)，(5，2)，(6，2)

の 11 通り。

よって，求める確率は　　$\dfrac{11}{6^2}=\dfrac{{}^{ケコ}11}{{}^{サシ}36}$

$\boxed{23}$ [2005センター]

$$y=3x^2-ax-a-b=3\left(x^2-\frac{a}{3}x\right)-a-b=3\left(x-\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{12}-a-b$$

よって，C は直線 $x=\dfrac{a}{{}^{\text{ア}}6}$ を軸とする放物線である。C は下に凸であるから，C と x 軸とが異なる二つの共有点をもつのは，頂点の y 座標が負になるときである。

ゆえに　$-\dfrac{a^2}{12}-a-b<0$

すなわち　$b>-\dfrac{a^2+{}^{\text{イウ}}12a}{{}^{\text{エオ}}12}$

C と x 軸との共有点の一つが $(1,\ 0)$ であるとき　$0=3\cdot1^2-a\cdot1-a-b$

よって　$b={}^{\text{カキ}}-2a+{}^{\text{ク}}3$

このとき，C を表す方程式は　$y=3x^2-ax-a-(-2a+3)$

すなわち　$y=3x^2-ax+a-3$

$3x^2-ax+a-3=0$ とすると　$(x-1)(3x-a+3)=0$

ゆえに，C と x 軸とのもう一方の共有点の x 座標は　$x=\dfrac{a-{}^{\text{ケ}}3}{{}^{\text{コ}}3}$

これが区間 $-1\leqq x\leqq0$ に含まれるとき

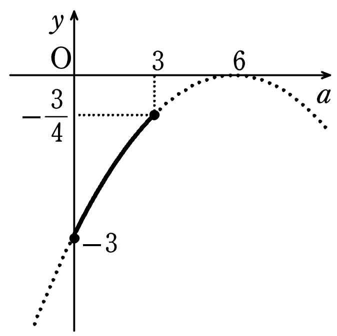
$-1\leqq\dfrac{a-3}{3}\leqq0$　　よって　$-3\leqq a-3\leqq0$

したがって　${}^{\text{サ}}0\leqq a\leqq{}^{\text{シ}}3$　……①

また，C の頂点の y 座標は

$$y=-\frac{a^2}{12}-a-b=-\frac{a^2}{12}-a-(-2a+3)$$

$$=-\frac{1}{12}(a^2-12a)-3=-\frac{1}{12}(a-6)^2$$



この y 座標は，① の範囲で $a=3$ のとき最大値 $\dfrac{{}^{\text{スセ}}-3}{{}^{\text{ソ}}4}$ をとる。

$\boxed{24}$ [2004センター]

(1)　$y=-x^2+(2a-5)x-2a^2+5a+3=-\left(x-\dfrac{2a-5}{2}\right)^2+\dfrac{-4a^2+37}{4}$

よって，頂点の座標は　$\left(\dfrac{2a-{}^{\text{ア}}5}{{}^{\text{イ}}2},\ \dfrac{-4a^2+{}^{\text{ウエ}}37}{4}\right)$

(2)　x^2 の係数の符号が負であるから，グラフ C は上に凸の放物線である．
ゆえに，グラフ C と x 軸が異なる 2 点で交わるための条件は，頂点の y 座標が正となることである．

すなわち　$\dfrac{-4a^2+37}{4}>0$

よって　$a^2<\dfrac{37}{4}$　　ゆえに　$-\dfrac{\sqrt{{}^{\text{オカ}}37}}{{}^{\text{キ}}2}<a<\dfrac{\sqrt{37}}{2}$　……①

(3)　$6^2<37<7^2$ であるから　$6<\sqrt{37}<7$

よって　$3<\dfrac{\sqrt{37}}{2}<\dfrac{7}{2}$

したがって，① を満たす整数 a は　$a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$　……②

また，グラフ C と x 軸との 2 つの交点の x 座標は，2 次方程式
$-x^2+(2a-5)x-2a^2+5a+3=0$ の 2 つの解である．

2 次方程式を解くと　$x=\dfrac{2a-5\pm\sqrt{-4a^2+37}}{2}$　……③

この 2 つの解がともに整数となるには $-4a^2+37$ が平方数でなければならない．
② の中で $-4a^2+37$ が平方数となるのは $a=3,\ -3$ のときである．
$a=3$ を ③ に代入すると　$x=0,\ 1$
$a=-3$ を ③ に代入すると　$x=-5,\ -6$
よって，グラフ C と x 軸との 2 つの交点の x 座標がともに整数となるのは $a={}^{\text{ク}}3$ または $a={}^{\text{ケコ}}-3$ のときである．
また，$a=-3$ のとき，交点の x 座標は ${}^{\text{サシ}}-5$ と ${}^{\text{スセ}}-6$ (または ${}^{\text{サシ}}-6$ と ${}^{\text{スセ}}-5$)

$\boxed{25}$ [2004センター]

(1)　$y=2x^2-ax+a-1$

$$=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{-a^2+8a-8}{8}$$

よって，グラフ C の頂点の座標は　$\left(\dfrac{a}{{}^{\text{ア}}4},\ \dfrac{{}^{\text{イ}}-a^2+{}^{\text{ウ}}8a-8}{{}^{\text{エ}}8}\right)$

また，グラフ C が x 軸に接するとき，頂点の y 座標が 0 となるから

$$\frac{-a^2+8a-8}{8}=0$$

整理して　$a^2-8a+8=0$

これを解いて　$a={}^{\text{オ}}4\pm{}^{\text{カ}}2\sqrt{2}$

(2)　$f(x)=2x^2-ax+a-1$ とする．
$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，グラフ C は下に凸の放物線である．

また，(1) から，軸の方程式は　$x=\dfrac{a}{4}$

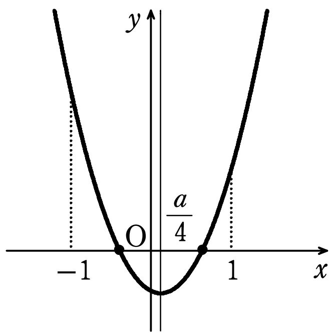
よって，右の図から，グラフ C が，x 軸の $-1<x<1$ の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$\dfrac{-a^2+8a-8}{8}<0$　……①

$f(-1)>0$　……②

$f(1)>0$　……③

$-1<\dfrac{a}{4}<1$　……④



① を解いて　$a<4-2\sqrt{2}$，$4+2\sqrt{2}<a$　……⑤

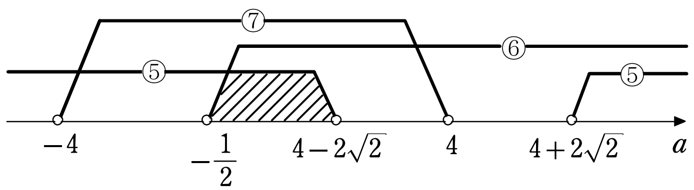
② から　$2\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+a-1>0$

よって　$a>-\dfrac{1}{2}$　……⑥

また，$f(1)=2\cdot1^2-a\cdot1+a-1=1>0$ であるから，③ はすべての実数 a で成り立つ．

④ から　$-4<a<4$　……⑦

⑤，⑥，⑦ の共通範囲を求めて　$-\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}2}<a<{}^{\text{ケ}}4-{}^{\text{コ}}2\sqrt{2}$



$\boxed{26}$ [2004センター]

(1)　A を B で割ると，次のようになる．

$$
\begin{array}{r}
x+1 \\
x^2+x+1\,\big)\,\overline{x^3+2x^2+(a^2+1)x+a^2+a-1} \\
\underline{x^3+x^2+x} \\
x^2+a^2x+a^2+a-1 \\
\underline{x^2+x+1} \\
(a^2-1)x+a^2+a-2
\end{array}
$$

よって　$Q=x+{}^{\text{ア}}1$，$R=(a^2-{}^{\text{イ}}1)x+a^2+a-{}^{\text{ウ}}2$

また，A が B で割り切れるとき，余りが 0 となるから

$a^2-1=0$　……①　かつ　$a^2+a-2=0$　……②

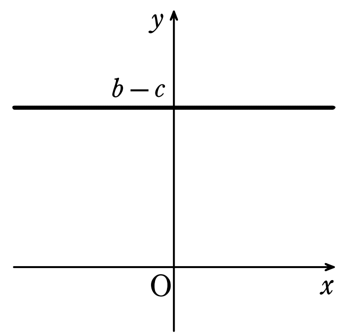
① から　$(a+1)(a-1)=0$　　よって　$a=\pm1$

② から　$(a+2)(a-1)=0$　　よって　$a=-2,\ 1$

したがって　$a={}^{\text{エ}}1$

(2)　1 次関数 $y=(2b+c-2d)x+b-c$ が常に $y>0$ であればよいから，右の図より

$2b+c-2d=0$ ……①，$b-c>0$ ……②



① から　$c=2(d-b)$

b，d は自然数であるから，この等式の右辺は偶数である．

よって，c は偶数である．

また，② より，$c<b\leqq3$ ……③ であるから，c は 2 以下の自然数である．

したがって　$c=2$

ゆえに，③ から　$b=3$

① に代入して　$2\cdot3+2-2d=0$　　よって　$d=4$

以上より　$b={}^{\text{オ}}3$，$c={}^{\text{カ}}2$，$d={}^{\text{キ}}4$

(3)　(i)　p，q が実数であるから，$(p+q+1)^2+(q-1)^2=0$ と「$p+q+1=0$ かつ $q-1=0$」は同値である．

$p+q+1=0$，$q-1=0$ を解くと　$p=-2$，$q=1$

よって，p と q が $(p+q+1)^2+(q-1)^2=0$ を満たすことは，$p=-2$ かつ $q=1$ であるための必要十分条件である．ゆえに　${}^{\text{ク}}$⓪

(ii)　命題「r または s が無理数ならば r^2-2s が無理数」は，$r=\sqrt{2}$，$s=2$ が反例であるから偽である．

したがって，r または s が無理数であることは，r^2-2s が無理数であるための十分条件ではない．

また，命題「r^2-2s が無理数ならば r または s が無理数」……(A) の対偶

「r，s がともに有理数ならば r^2-2s が有理数」は真であるから，命題 (A) も真である．

よって，r または s が無理数であることは，r^2-2s が無理数であるための必要条件である．

以上より　${}^{\text{ケ}}$①