大学入試センター試験数学Ⅰ・A　過去問　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 ＜配点20点＞

a を定数とし，x の2次関数 $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$ のグラフを G とする。

(1)　グラフ G と y 軸との交点の y 座標を Y とする。Y の値が最小になるのは

$a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときで，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。このときグラフ G は x 軸と異なる2点で交わり，その交点の x 座標は，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2)　グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a=-\boxed{\text{ケ}}$ のときで，このときのグラフを G_1 とする。グラフ G が x 軸に接するのは $a=-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときで，このときのグラフを G_2 とする。グラフ G_1 を x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{セソ}}$ だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

解説

G : $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$　……①

(1)　$Y=0^2-2(a+2)\cdot0+a^2-a+1=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

よって，Y の値が最小になるのは $a=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}$ のときで，最小値は $\dfrac{{}^{ウ}3}{{}^{エ}4}$ である。

$a=\frac{1}{2}$ のとき，①は　$y=x^2-5x+\frac{3}{4}$

ゆえに，G と x 軸との交点の x 座標は，方程式 $x^2-5x+\frac{3}{4}=0$ の解で，これを解くと

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot\frac{3}{4}}}{2\cdot1}=\frac{{}^{オ}5\pm\sqrt{{}^{カキ}22}}{{}^{ク}2}$$

(2)　G が y 軸に関して対称になるのは，G の軸が y 軸になるときである。①より，

$y=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1=\{x-(a+2)\}^2-5a-3$　……②

よって，G の軸は直線 $x=a+2$ で，これが y 軸と一致するとき　$a+2=0$

ゆえに　$a=-{}^{ケ}2$　これを②に代入して　$y=x^2+7$　この関数のグラフが G_1 である。

G が x 軸に接するのは，G の頂点の y 座標が0になるときである。

②より，G の頂点の y 座標は $-5a-3$ であるから

$-5a-3=0$　　ゆえに　$a=-\dfrac{{}^{コ}3}{{}^{サ}5}$

これを②に代入して　$y=\left(x-\frac{7}{5}\right)^2$　この関数のグラフが G_2 である。

G_1 の頂点は　$(0,\ 7)$，　G_2 の頂点は　$\left(\frac{7}{5},\ 0\right)$

G_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動し，G_2 に重なるとすると

$0+p=\frac{7}{5}$，$7+q=0$　よって　$p=\dfrac{{}^{シ}7}{{}^{ス}5}$，$q={}^{セソ}-7$

2 ＜配点20点＞

線分 AB を直径とする半円周上に2点 C，D があり，AC$=2\sqrt{5}$，AD$=8$，

$\tan\angle\mathrm{CAD}=\frac{1}{2}$ であるとする。

このとき，$\cos\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，CD$=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

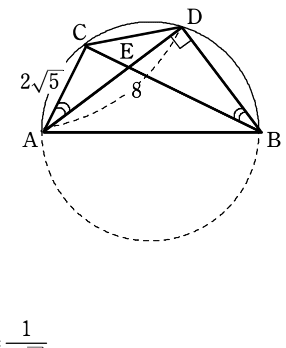
さらに，△ADC の面積は $\boxed{\text{カ}}$，AB$=\boxed{\text{キク}}$ である。

解説

$$\cos^2\angle\mathrm{CAD}=\frac{1}{1+\tan^2\angle\mathrm{CAD}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$\tan\angle\mathrm{CAD}=\frac{1}{2}>0$ より，∠CAD は鋭角であるから

$\cos\angle\mathrm{CAD}>0$



よって　$\cos\angle\mathrm{CAD}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\dfrac{{}^{ア}2\sqrt{{}^{イ}5}}{{}^{ウ}5}$

△ADC において，余弦定理により

$\mathrm{CD}^2=(2\sqrt{5})^2+8^2-2\cdot2\sqrt{5}\cdot8\cos\angle\mathrm{CAD}$

$=20+64-32\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=20$

CD>0 であるから　　CD$=\sqrt{20}={}^{エ}2\sqrt{{}^{オ}5}$

また　　$\sin\angle\mathrm{CAD}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{CAD}}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

よって，△ADC の面積は

$\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{CAD}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot8\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}={}^{カ}8$

線分 AB は △ADC の外接円の直径であるから，この外接円の半径を R とすると

AB$=2R$

△ADC において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CAD}}=2R$

よって　$2R=2\sqrt{5}\div\frac{1}{\sqrt{5}}=10$　すなわち　AB$={}^{キク}10$

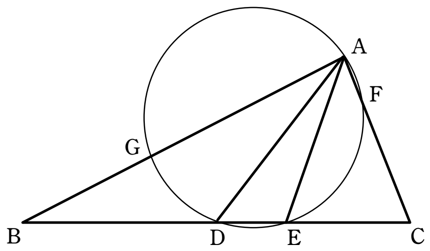
3 ＜配点20点＞

三角形 ABC の辺 BC の中点を D，∠A の二等分線と辺 BC の交点を E とする．

CA＜AB で，三角形 ADE の外接円と辺 CA，AB とはそれぞれ A と異なる交点 F，G をもつとする．このとき，BG＝CF であることを証明する．

次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ については下の ⓪～Ⓔ のうちから選択し，$\boxed{\text{オカキ}}$ と $\boxed{\text{コサシ}}$ には当てはまる文字を A ～ G のうちから選べ．ただし，オとキ，コとシは解答の順序を問わない．

⓪ a	① b	② c	③ a^2	④ b^2
⑤ c^2	⑥ ab	⑦ bc	⑧ ac	⑨ $a+b$
Ⓐ $b+c$	Ⓑ $a+c$	Ⓒ $2(a+b)$	Ⓓ $2(b+c)$	Ⓔ $2(a+c)$



［証明］ BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする．AE が ∠A の二等分線であるから，

BE$=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，EC$=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$

である．また，四角形 AGDE は円に内接するから∠EAB$=\angle\boxed{\text{オカキ}}$ となり，

∠B が共通だから △EAB と △$\boxed{\text{オカキ}}$ は相似である．したがって，

BG$=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$　である．

同様に，四角形 AFED も円に内接するから ∠DAC$=\angle\boxed{\text{コサシ}}$ であり，

△DAC と △$\boxed{\text{コサシ}}$ も相似である．よって，CF$=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

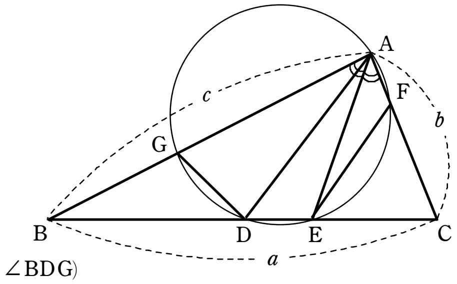
が成り立ち，BG＝CF が示された．

解説

BE : EC$=c:b$ であるから

BE$=a\times\dfrac{c}{b+c}=\dfrac{ac}{b+c}$

よって　^{ア}⑧，^{イ}Ⓐ



EC$=a\times\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{ab}{b+c}$

よって　^{ウ}⑥，^{エ}Ⓐ

また，∠EAB$=180°-$∠GDE

$=\angle{}^{オカキ}$GDB (または ∠BDG)

となり，∠B が共通であるから

△EAB∽△GDB

したがって　$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}}$　　ゆえに　$\mathrm{BG}=\mathrm{BE}\cdot\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{ac}{b+c}\cdot\dfrac{\frac{a}{2}}{c}=\dfrac{a^2}{2(b+c)}$

よって　^{ク}③，^{ケ}Ⓓ

また，∠DAC$=180°-$∠DEF$=\angle{}^{コサシ}$FEC (または ∠CEF) となり，

∠C が共通であるから　△DAC∽△FEC

よって　$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AC}}$　　ゆえに　$\mathrm{CF}=\mathrm{CD}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\frac{ab}{b+c}}{b}=\dfrac{a^2}{2(b+c)}$

が成り立ち，BG＝CF が示された．