

1 [2003センター]

解説

(1)  $0 \leq x \leq 3$  のとき  $g(x) = \int_0^x t dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} x^2$

$x \geq 3$  のとき  $g(x) = \int_0^3 t dt + \int_3^x (-3t + 12) dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^3 + \left[ -\frac{3}{2} t^2 + 12t \right]_3^x$   
 $= -\frac{3}{2} x^2 + 12x - 18$

(2)  $0 < x < 3$  のとき  $g(x) = \frac{1}{2} x^2$ ,  $g'(x) = x$  であるから  $P(a, g(a))$  ( $0 < a < 3$ ) における接線  $l$  の傾きは  $g'(a) = a$ ,  $l$  の方程式は  $y = a(x-a) + \frac{1}{2} a^2$

よって  $y = ax - \frac{1}{2} a^2$

(3)  $ax - \frac{1}{2} a^2 = 0$  とする.  $a \neq 0$  であるから

$x = \frac{1}{2} a$  よって  $Q\left(\frac{1}{2} a, 0\right)$

グラフから,  $R$  は  $x > 3$  の位置にある.

よって, (1) から  $-\frac{3}{2} x^2 + 12x - 18 = ax - \frac{1}{2} a^2$

整理すると  $3x^2 + (2a - 24)x + (6+a)(6-a) = 0$

よって  $\{3x - (6+a)\}\{x - (6-a)\} = 0$

ゆえに  $x = \frac{a+6}{3}$ ,  $6-a$

$0 < a < 3$  であるから  $\frac{a+6}{3} < 3 < 6-a$

よって,  $R$  の  $x$  座標は  $6-a$

このとき,  $l$  の方程式に代入すると  $y = a(6-a) - \frac{1}{2} a^2 = 6a - \frac{3}{2} a^2$

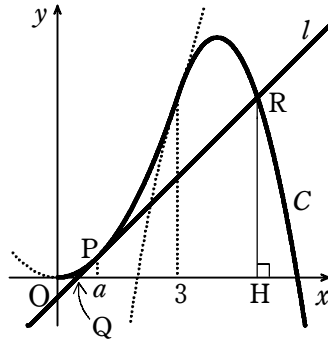
ゆえに  $R\left(6-a, 6a - \frac{3}{2} a^2\right)$

(4) 図から  $S = \frac{1}{2} \left\{ (6-a) - \frac{1}{2} a \right\} \times \left( 6a - \frac{3}{2} a^2 \right) = \frac{9}{8} a^3 - \frac{9}{2} a^2 + 18a$

$S' = \frac{27}{8} a^2 - 9a + 18 = \frac{9}{8} (3a-4)(a-4)$

よって,  $0 < a < 3$  における  $S$  の増減表は右のようにな

る. ゆえに,  $S$  は  $a = \frac{4}{3}$  のとき最大値をとる.



$a$	0	...	$\frac{4}{3}$	...	3
$S'$		+	0	-	
$S$		↗	極大	↘	

2 [2003センター]

解説

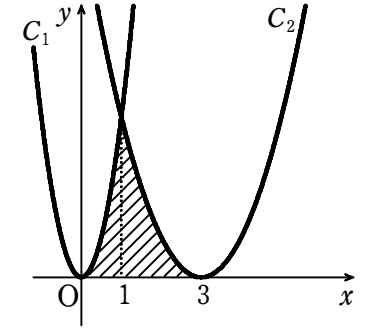
(1)  $C_2: y = (x-3)^2$  であるから,  $C_2$  は  $x$  軸と点  $(3, 0)$  で接する.

$4x^2 = x^2 - 6x + 9$  とすると  $3x^2 + 6x - 9 = 0$

これを解くと  $x = -3, 1$

求める面積は, 右図の斜線部分であるから

$S = \int_0^1 4x^2 dx + \int_1^3 (x-3)^2 dx$   
 $= \left[ \frac{4}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3} (x-3)^3 \right]_1^3 = 4$



(2)  $C_1: y' = 8x$ ,  $C_2: y' = 2x - 6$  であるから,

条件より  $8a = 2b - 6$

よって  $b = 4a + 3$

このとき  $b^2 - 6b + 9 = (b-3)^2 = 16a^2$  であるから, 点  $P, Q$  の座標はそれぞれ

$P(a, 4a^2)$ ,  $Q(4a+3, 16a^2)$

$a > 0$  であるから,  $l$  の方程式は  $y = \frac{16a^2 - 4a^2}{(4a+3) - a} (x-a) + 4a^2$

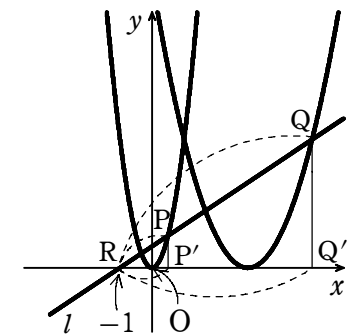
よって  $y = \frac{4a^2}{a+1} x - \frac{4a^3}{a+1} + 4a^2$

ゆえに  $y = \frac{4a^2}{a+1} (x+1)$

これは,  $a$  によらず点  $R(-1, 0)$  を通る.

$P, Q$  から  $x$  軸に垂線  $PP', QQ'$  を下ろすと

$RP : RQ = RP' : RQ'$   
 $= \{a - (-1)\} : \{4a+3 - (-1)\}$   
 $= (a+1) : 4(a+1) = 1 : 4$



3 [2003センター]

解説

(1)  $C: y = -(x-1)^2 + 1$  であるから,  $l$  の方程式は  $x = 1$

線分  $PR$  の中点が  $l$  上にあればよいから,  $R$  の  $x$  座標を  $X$  とすると

$$\frac{a+X}{2}=1 \quad \text{よって} \quad X=2-a$$

Cはlに関して対称であるから、RもC上の点である。

よって、RとQが一致するには、それぞれのx座標が等しければよい。

$$\text{ゆえに} \quad 2-a=2a \quad \text{よって} \quad a=\frac{2}{3}$$

(2)  $0 < a < \frac{2}{3}$  のとき  $a < 2a < 2-a$  である。

$f(x) = 2x - x^2$  とすると、右図から

$$S = \triangle OPR + \triangle QPR$$

$$= \frac{1}{2}(2-a-a) \cdot f(a) + \frac{1}{2}(2-a-a) \cdot \{f(2a) - f(a)\}$$

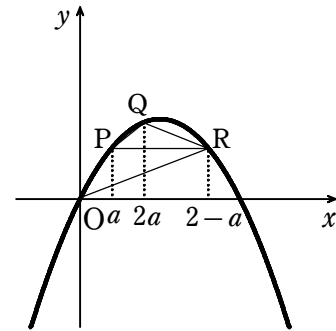
$$= \frac{1}{2}(2-2a) \cdot f(2a) = (1-a)\{2 \cdot 2a - (2a)^2\}$$

$$= 4(a^3 - 2a^2 + a)$$

$$S' = 4(3a^2 - 4a + 1) = 4(a-1)(3a-1)$$

よって、 $0 < a < \frac{2}{3}$  におけるSの増減表は右のようになる。

ゆえに、Sは  $a = \frac{1}{3}$  のとき最大値をとる。



a	0	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{2}{3}$
S'		+	0	-	
S		↗	極大	↘	

(3) Q(2a, 4a - 4a^2), R(2-a, 2a - a^2) であるから

$$\text{中点 M の座標は} \quad \left( \frac{2a+2-a}{2}, \frac{4a-4a^2+2a-a^2}{2} \right)$$

$$\text{よって} \quad \left( 1 + \frac{a}{2}, 3a - \frac{5}{2}a^2 \right)$$

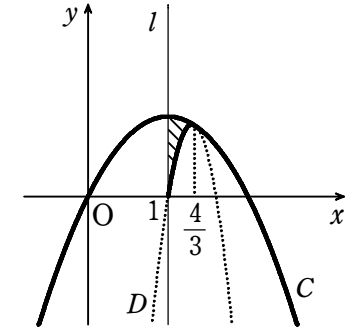
$$X = 1 + \frac{a}{2}, \quad Y = 3a - \frac{5}{2}a^2 \quad \text{から} \quad a \text{ を消去すると} \quad Y = -10X^2 + 26X - 16$$

$$\text{また、} \quad 0 < a < \frac{2}{3} \quad \text{であるから} \quad 1 < 1 + \frac{a}{2} < \frac{4}{3} \quad \text{よって} \quad 1 < X < \frac{4}{3}$$

ゆえに、Mの軌跡は放物線  $y = -10x^2 + 26x - 16$  の  $1 < x < \frac{4}{3}$  の部分である。

求める面積は、右図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} & \int_1^{\frac{4}{3}} \{(2x-x^2) - (-10x^2+26x-16)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{4}{3}} (9x^2 - 24x + 16) dx = 9 \int_1^{\frac{4}{3}} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 dx \\ &= 9 \left[ \frac{1}{3} \left(x - \frac{4}{3}\right)^3 \right]_1^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



4 [2003センター]

解説

(1)  $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \dots\dots ①$

条件より、 $f'(1) = f'(2) = 0$  であるから、 $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$  と因数分解される。

展開して  $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

①と係数を比較して  $a = -9, b = 12$

$f(1) = 2 + a + b + c = 6$  より  $c = 1$

したがって、 $f(x)$  の極小値は  $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 5$

(2)  $g(x) = f(x-1) + 5 = 2(x-1)^3 - 9(x-1)^2 + 12(x-1) + 1 + 5$

$$= 2x^3 - 15x^2 + 36x - 17$$

$$h(x) = (2x^3 - 15x^2 + 36x - 17) - (2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)$$

$$= -6x^2 + 24x - 18 = -6(x-3)(x-1) \quad (\text{または} \quad -6(x-3)(x-1))$$

$-6(x-1)(x-3) \geq 0$  から  $(x-1)(x-3) \leq 0$  ゆえに  $1 \leq x \leq 3$

(3) (2)から、2つの曲線  $y = f(x), y = g(x)$  は、 $x = 1, 3$  で交点を持ち、 $1 \leq x \leq 3$  で

$h(x) \geq 0$  すなわち  $g(x) \geq f(x)$  である。

$$\begin{aligned} \text{よって、求める面積は} \quad & \int_1^3 \{g(x) - f(x)\} dx = \int_1^3 h(x) dx = \int_1^3 \{-6(x-1)(x-3)\} dx \\ &= -\frac{6}{6} (3-1)^3 = 8 \end{aligned}$$

5 [2002センター]

解説

(1) 円  $C_1$  は、点  $(a, 1)$  を中心とし、 $x$  軸に接するから半径は1である。

ゆえに、その方程式は  $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$

(2) 関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  を微分すると  $y' = x$

ゆえに、 $P\left(b, \frac{1}{2}b^2\right)$  における接線  $l$  の傾きは  $b$  である。

したがって、 $l$  の方程式は  $y = b(x-b) + \frac{1}{2}b^2$

すなわち  $y = bx - \frac{1}{2}b^2$  である。

また、 $P$  を通り、 $l$  に直交する直線  $m$  の方程式は

$y = -\frac{1}{b}(x-b) + \frac{1}{2}b^2$  すなわち  $y = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{2}b^2 + 1$  である。

(3)  $C_1$  の中心  $(a, 1)$  が、 $m$  上にあるとき  $1 = -\frac{1}{b}a + \frac{1}{2}b^2 + 1$

すなわち  $a = \frac{1}{2}b^3$  …… ① が成り立つ。

更に、 $C_1 : (x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$  が  $P\left(b, \frac{1}{2}b^2\right)$  を通るとき

$(b-a)^2 + \left(\frac{1}{2}b^2 - 1\right)^2 = 1$  …… ② が成り立つ。

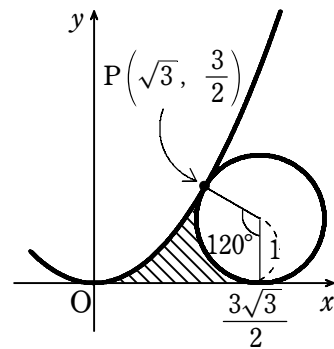
①, ② を解くと  $b = \sqrt{3}$ ,  $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

このとき、 $l$  の傾きは  $\sqrt{3}$  であるから、 $l$  と  $x$  軸のなす角は  $60^\circ$  である。

また、求める面積は右図の斜線部分の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3}$$



6 [2002センター]

解説

B の座標は  $(\sqrt{a}, a)$  である。

(1) グラフの対称性から  $b = 0$

点 A  $(a, a)$  を通るから  $a = a^2 + c$  ゆえに  $c = a - a^2$

$$S_1 = \int_{-a}^a \{a - (x^2 + a - a^2)\} dx = -\int_{-a}^a (x+a)(x-a) dx$$

$$= \frac{(2a)^3}{6} = \frac{4}{3}a^3$$

(2)  $S_2 = \frac{1}{2} \times \{a - (-a)\} \times a = a^2$

$S_1 = S_2$  となるのは  $\frac{4}{3}a^3 = a^2$  のとき。ゆえに  $a = \frac{3}{4}$

(3)  $S_1 - S_2 = \frac{4}{3}a^2 \left(a - \frac{3}{4}\right)$  よって、 $0 < a \leq \frac{3}{4}$  のとき  $S_2 \geq S_1$

$S = S_2 - S_1$  とおく。  $S' = 2a - 4a^2 = -4a\left(a - \frac{1}{2}\right)$

よって、 $0 < a \leq \frac{3}{4}$  における  $S$  の増減表は右のようになる。

$a$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{4}$
$S'$		+	0	-	
$S$		↗	極大	↘	

ゆえに、 $S_2 - S_1$  は  $a = \frac{1}{2}$  において

最大値  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}$  をとる。

7 [2002センター]

解説

$2\log_7 x - \log_7 y - 3 = 0$  …… ①

$\log_7 x - \log_7 y - a = 0$  …… ②

(1) ① において、真数は正であるから  $x > 0, y > 0$

① を変形すると  $\log_7 x^2 - \log_7 7^3 = \log_7 y$  よって  $y = 7^{\log_7 x^2 - 3} = x^2 \cdot 7^{-3} (x > 0)$

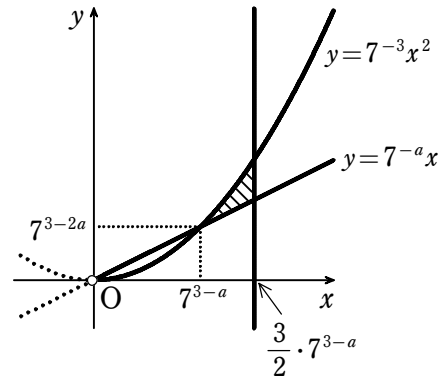
② において、真数は正であるから  $x > 0, y > 0$

② を変形すると  $\log_7 x - \log_7 7^a = \log_7 y$  よって  $y = 7^{\log_7 x - a} = x \cdot 7^{-a} (x > 0)$

(2)  $7^{-3}x^2 = 7^{-a}x, x > 0$  から  $x = 7^{3-a}$  よって  $y = 7^{-a} \times 7^{3-a} = 7^{3-2a}$

ゆえに、交点は  $(7^{3-a}, 7^{3-2a})$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad T(a) &= \int_{7^{3-a}}^{\frac{3}{2} \cdot 7^{3-a}} (7^{-3}x^2 - 7^{-a}x) dx \\
 &= \left[ 7^{-3} \cdot \frac{x^3}{3} - 7^{-a} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{7^{3-a}}^{\frac{3}{2} \cdot 7^{3-a}} \\
 &= \frac{7^{-3}}{3} \left\{ \left( \frac{3}{2} \cdot 7^{3-a} \right)^3 - (7^{3-a})^3 \right\} \\
 &\quad - \frac{7^{-a}}{2} \left\{ \left( \frac{3}{2} \cdot 7^{3-a} \right)^2 - (7^{3-a})^2 \right\} \\
 &= \frac{19}{24} \cdot 7^{6-3a} - \frac{5}{8} \cdot 7^{6-3a} = \frac{7^{6-3a}}{6}
 \end{aligned}$$



$$(4) \quad \log_7 T(a) = 6 - 3a - \log_7 6$$

よって  $6 - 3a - \log_7 6 \leq 0$  ゆえに  $a \geq 2 - \frac{1}{3} \log_7 6$

$0 < \log_7 6 < 1$  であるから  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{3} \log_7 6 < 0$

よって、最小の整数  $a$  は  $\simeq 2$  である。

8 [2002センター]

解説

(1) 曲線  $C_1: y = mx^2 + nx$  が、点  $A(1, 0)$  を通るから  $m + n = 0$  …… ①

また、 $y' = 2mx + n$

原点  $O$  における接線の傾きが  $1$  であるから  $n = 1$  …… ②

①, ② から  $m = \overset{ア}{-}1, n = \overset{ウ}{1}$

曲線  $C_2: y = px^3 + qx^2 + rx$  が、点  $A(1, 0)$  を通るから  $p + q + r = 0$  …… ③

点  $B(-1, 0)$  を通るから  $-p + q - r = 0$  …… ④

また、 $y' = 3px^2 + 2qx + r$

原点  $O$  における接線の傾きが  $a$  であるから  $r = a$  …… ⑤

③, ④, ⑤ から  $p = \overset{エ}{-}a, q = \overset{カ}{0}, r = \overset{キ}{a}$

(2) (1) から  $C_1: y = -x^2 + x, C_2: y = -ax^3 + ax$

交点の  $x$  座標は  $-x^2 + x = -ax^3 + ax$  の解に対応する。

変形すると  $ax^3 - x^2 - (a-1)x = 0$  ゆえに  $x(x-1)(ax+a-1) = 0$

よって  $x = 0, \overset{ケ}{1}, \frac{\overset{ク}{1}}{\overset{コ}{a}} - \overset{カ}{1}$

したがって、 $0 < \frac{1}{a} - 1 < 1$  であればよい。 ゆえに  $\frac{\overset{シ}{1}}{\overset{ス}{2}} < a < \overset{セ}{1}$

(3)  $y = -x^2 + x$  を微分すると  $y' = -2x + 1$

よって、 $C_1$  の  $A(1, 0)$  における接線  $l_1$  の方程式は  $y = \overset{ソ}{-}x + \overset{タ}{1}$

また、 $C_2$  の  $O$  における接線  $l_2$  の方程式は  $y = ax$

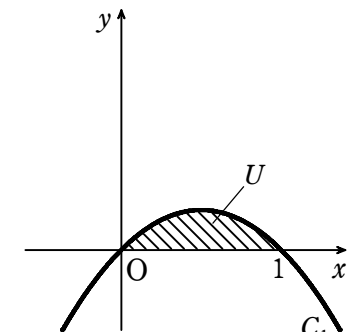
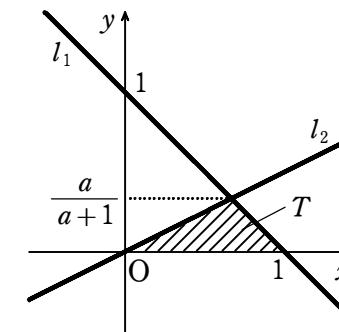
$l_1$  と  $l_2$  の交点の  $y$  座標は  $y = a(-y+1)$  から  $y = \frac{a}{a+1}$

ゆえに、 $x$  軸と  $l_1, l_2$  で囲まれた部分の面積  $T$  は

$$T = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{a}{a+1} = \frac{\overset{チ}{a}}{\overset{ツ}{2(a+1)}}$$

また、 $x$  軸と  $C_1$  で囲まれた部分の面積  $U$  は

$$U = \int_0^1 (-x^2 + x) dx = -\int_0^1 x(x-1) dx = \frac{\overset{ト}{1}}{\overset{テ}{6}}$$



$0 < a < 1$  であるから  $l_2$  は  $0 < x < 1$  で  $C_1$  と交わる。

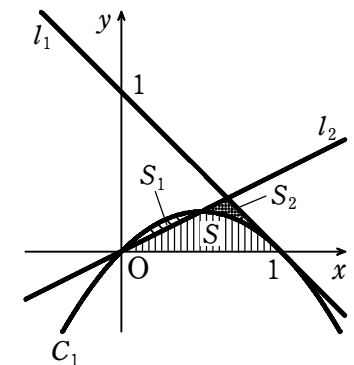
右の図の縦線の部分の面積を  $S$  とすると

$$S_1 = S_2 \iff S_1 + S = S_2 + S \iff U = T$$

ゆえに、 $S_1 = S_2$  となるのは  $U = T$  のときである。

よって  $\frac{1}{6} = \frac{a}{2(a+1)}$

これを解くと  $a = \frac{\overset{ニ}{1}}{\overset{ノ}{2}}$



9 [2002センター]

解説

(1)  $y = 3x^2$  から  $y' = 6x$

よって、 $P(a, 3a^2)$  における接線  $l$  の方程式は  $y = 6a(x-a) + 3a^2$

すなわち  $l: y = \overset{フ}{6}ax - \overset{ヘ}{1}3a^{\overset{ニ}{2}}$

また、 $Q(-a^3, 3a^6)$  における接線  $m$  の方程式は  $m: y = \overset{エ}{-}6a^{\overset{カ}{3}}x - \overset{キ}{3}a^{\overset{ク}{6}}$

(2)  $6aX - 3a^2 = -6a^3X - 3a^6$  とすると  $6a(1+a^2)X = 3a^2(1+a^2)(1-a^2)$

よって  $X = \frac{1}{2}(a - a^3)$

$X' = \frac{1}{2}(1 - 3a^2) = -\frac{3}{2}\left(a + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(a - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ゆえに、 $a > 0$  における  $X$  の増減表は右のようになる。

よって、 $X$  は  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$  のとき最大値

$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right\} = \frac{\sqrt{3}}{9}$  をとる。

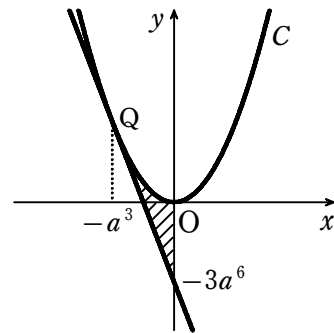
$a$	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...
$X'$		+	0	-
$X$		↗	極大	↘

(3) 求める面積は右の図の斜線部分の面積であるから

$\int_{-a^3}^0 \{3x^2 - (-6a^3x - 3a^6)\} dx$

$= 3 \int_{-a^3}^0 (x + a^3)^2 dx = \left[ (x + a^3)^3 \right]_{-a^3}^0 = a^9$

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$  のとき  $a^9 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 = \frac{\sqrt{3}}{243}$



10 [2001センター]

解説

$y = x^2$  から  $y' = 2x$  よって、点  $P(a, a^2)$  における接線  $l$  の方程式は

$y - a^2 = 2a(x - a)$  すなわち  $y = 2ax - a^2$

よって、接線  $l$  と  $y$  軸との交点  $Q$  の座標は  $Q(0, -a^2)$  である。

$l$  と  $y$  軸のなす角が  $30^\circ$ 、すなわち  $l$  と  $x$  軸のなす角が  $60^\circ$  のとき

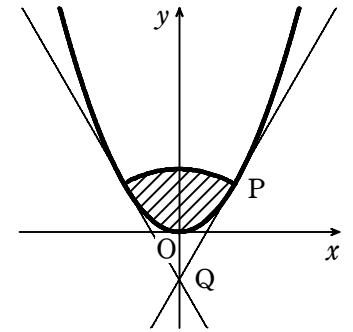
$2a = \tan 60^\circ$  よって  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

このとき、 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 、 $Q\left(0, -\frac{3}{4}\right)$  であるから

$PQ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{3}$

また、求める面積は

$$\begin{aligned} & \pi(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[ x^2 - \left\{ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\} \right] dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + \frac{3}{4} x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



11 [2001センター]

解説

$0^\circ \leq \theta \leq 210^\circ$  において  $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$  よって  $\frac{\pi}{2} - 1 \leq x \leq 1$  ..... ①

また、 $y = 3x - 2x^3$  から  $y' = 3 - 6x^2 = -6\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって、①の範囲で  $y$  の増減表を書くと右のようになる。

$x$	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$y'$		+	0	-	
$y$		↗	極大	↘	

$f(x) = 3x - 2x^3$  とおくと

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{4}$

$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 1$

ゆえに、 $y$  は  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最大値  $\sqrt{2}$  をとり、 $x = \frac{-1}{2}$  のとき最小値

$-\frac{5}{4}$  をとる。

$\theta$  の関数としては、 $0^\circ \leq \theta \leq 210^\circ$  において  $y$  は

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、すなわち  $\theta = 45^\circ$  および  $\theta = 135^\circ$  のとき最大

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$  のとき、すなわち  $\theta = 210^\circ$  のとき最小

である。

12 [2001センター]

解説

$$S_1 = \int_0^a (x^2 + x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2$$

また、直線 PQ の方程式は

$$y - b = \frac{a^2 + a - b}{a - 0} (x - 0)$$

すなわち  $y = \frac{a^2 + a - b}{a}x + b$  であるから

$$S_2 = \int_0^a \left( \frac{a^2 + a - b}{a}x + b - x^2 - x \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a^2 - b}{2a}x^2 + bx \right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{a^2 - b}{2a}a^2 + ab$$

$$= \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}ab$$

したがって、 $S_1 = S_2$  とすると  $\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}ab$

ゆえに  $b = \frac{1}{3}a^2 + a$

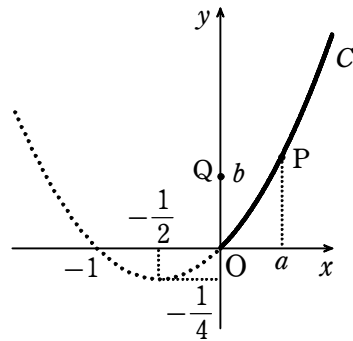
このとき、線分 PQ の中点 R の座標は  $\left( \frac{1}{2}(a+0), \frac{1}{2}\left(a^2 + a + \frac{1}{3}a^2 + a\right) \right)$

すなわち  $\left( \frac{a}{2}, \frac{2}{3}a^2 + a \right)$

ここで、 $R(x, y)$  とすると  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{2}{3}a^2 + a$  また  $a > 0$

ゆえに、点 R の軌跡は  $y = \frac{2}{3}(2x)^2 + 2x, x > 0$  の表す曲線、すなわち、

曲線  $y = \frac{8}{3}x^2 + 2x$  の第 1 象限の部分である。



13 [2001センター]

解説

$$(1) S_1 = \int_0^a (ax - x^2) dx$$

$$= -\int_0^a x(x - a) dx$$

$$= \frac{(a-0)^3}{6} = \frac{1}{6}a^3$$

$$(2) S_2 = \int_a^1 (x^2 - ax) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - \left( \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \right)$$

$$= \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

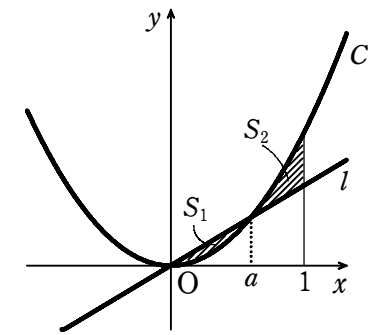
$$(3) \frac{dS}{da} = a^2 - \frac{1}{2} = \left( a + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

よって、 $0 < a < 1$  における  $S$  の増減表は次のようになる。

$a$	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
$S$		↘	極小	↗	

ゆえに、 $S$  は  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき極小かつ最小となる。

$$\text{最小値は } \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$



14 [2001センター]

解説

$$(1) y' = 6x^2 - 3$$

よって、接線の方程式は  $y = (6a^2 - 3)(x - a) + 2a^3 - 3a$

すなわち  $y = (6a^2 - 3)x - 4a^3 \dots\dots ①$

(2) 接線 ① が点 (1, b) を通るとき

$$b = (6a^2 - 3) \cdot 1 - 4a^3$$

よって  $b = \text{カキ} - 4a^3 + \text{ケ} 6a^2 - \text{サ} 3 \dots\dots ②$

(3) 点(1, b)からCへ相異なる3本の接線が引けるための必要十分条件は、aの方程式②が相異なる3つの実数解をもつことである。

$$f(a) = -4a^3 + 6a^2 - 3 \text{ とおく.}$$

$$f'(a) = -12a^2 + 12a = -12a(a-1)$$

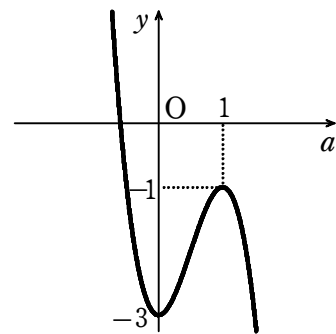
よって、関数  $y = f(a)$  の増減表は次のようになる。

a	...	0	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	-3	↗	-1	↘

よって、 $y = f(a)$  のグラフは右図のようになる。

②が相異なる3つの実数解をもつための必要十分条件は、 $y = f(a)$  のグラフと直線  $y = b$  が相異なる3つの共有点をもつことである。

よって、グラフから  $\text{シス} -3 < b < \text{セン} -1$



15 [2000センター]

解説

$$(1) \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (3bx^2 + ux + v) dx = \left[ bx^3 + \frac{u}{2}x^2 + vx \right]_{-1}^0 = b - \frac{u}{2} + v$$

よって、 $\int_{-1}^0 g(x) dx = -6$  から  $b - \frac{u}{2} + v = -6$

ゆえに  $u - 2v = 2b + 12 \dots\dots ①$

また、放物線Cが点(-1, -9)を通るから  $g(-1) = -9$

よって  $3b(-1)^2 + u(-1) + v = -9$

ゆえに  $u - v = 3b + 9 \dots\dots ②$

①, ②から  $u = \text{ア} 4b + \text{ウ} 6, v = \text{エ} b - \text{オ} 3$

したがって  $g(x) = 3bx^2 + (4b+6)x + b-3$

また  $f'(x) = 6ax - 8a - 6,$

$$g'(x) = 6bx + 4b + 6$$

放物線  $y = f(x)$  と放物線Cがy軸上で共有点をもつから  $f(0) = g(0)$

よって  $4a + 6 = b - 3$  ゆえに  $4a - b = -9 \dots\dots ③$

また、y軸上の共有点における二つの放物線の接線が一致するから

$$f'(0) = g'(0)$$

よって  $-8a - 6 = 4b + 6$  ゆえに  $2a + b = -3 \dots\dots ④$

③, ④から  $a = \text{カキ} - 2, b = \text{ク} 1$

このとき  $f(0) = -2, f'(0) = 10$

したがって、接線の方程式は

$$y - (-2) = 10(x - 0) \text{ すなわち } y = \text{ケコ} 10x - \text{サ} 2$$

$$(2) h(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \{3at^2 - (8a+6)t + 4a+6\} dt$$

$$= \left[ at^3 - (4a+3)t^2 + (4a+6)t \right]_0^x$$

$$= ax^3 - (4a+3)x^2 + (4a+6)x,$$

$$h'(x) = f(x) = 3ax^2 - (8a+6)x + 4a+6$$

よって  $h(0) = \text{シ} 0,$

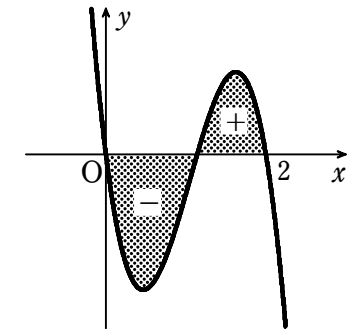
$$h(2) = a \cdot 2^3 - (4a+3) \cdot 2^2 + (4a+6) \cdot 2 = \text{ソ} 0,$$

$$h'(0) = \text{セ} 4a + \text{ソ} 6,$$

$$h'(2) = 3a \cdot 2^2 - (8a+6) \cdot 2 + 4a+6 = \text{タチ} -6$$

$h(x)$  は3次関数であり、 $h(0) = h(2) = 0, h'(2) < 0$  であるから、 $0 \leq x \leq 2$  の範囲で  $h(x)$  が正の値も負の値もとるための条件は  $h'(0) < 0$

よって  $4a + 6 < 0$  ゆえに  $a < \frac{\text{ツテ} -3}{\text{ト} 2}$



16 [2000センター]

解説

(1)  $-x^2 - 4x = -x^2 + 2x$  とすると  $x = 0$

よって、Pのx座標は  $x = 0$

また、y座標は  $y = -0^2 - 4 \cdot 0 = 0$

ゆえに  $P(\text{ア} 0, \text{イ} 0)$

(2)  $y = -x^2 - 4x$  から  $y' = -2x - 4$

よって、点Q(-4, 0)におけるC<sub>1</sub>の接線の方程式は

$$y - 0 = \{-2(-4) - 4\}(x + 4)$$

すなわち  $y = \text{ウ} 4x + \text{エオ} 16$

$y = -x^2 + 2x$  から  $y' = -2x + 2$

よって、点R(2, 0)におけるC<sub>2</sub>の接線の方程式は

$$y - 0 = (-2 \cdot 2 + 2)(x - 2)$$

すなわち  $y = \text{カキ} - 2x + \text{ク} 4$

(3)  $C_3$  が点  $Q$  を通るとき  $0 = k\{-(-4)^2 + a(-4) + b\}$

$k > 0$  から  $4a - b = -16$  …… ①

$C_3$  が点  $R$  を通るとき  $0 = k(-2^2 + a \cdot 2 + b)$

$k > 0$  から  $2a + b = 4$  …… ②

①, ② から  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{8}{3}$

このとき,  $C_3$  は  $y = k(-x^2 - 2x + 8)$  …… ③

また  $y' = -2kx - 2k$

よって, 点  $Q$  における  $C_3$  の接線の傾きは

$$-2k(-4) - 2k = 6k$$

これが, 点  $Q$  における  $C_1$  の接線の傾きと一致するとき

$$6k = 4$$

ゆえに  $k = \frac{2}{3}$

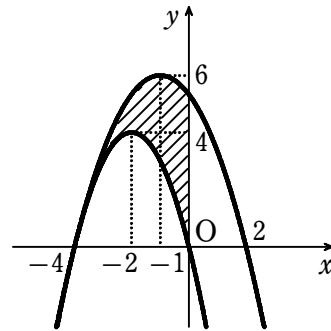
このとき, ③ は  $y = \frac{2}{3}(-x^2 - 2x + 8)$

ここで  $\frac{2}{3}(-x^2 - 2x + 8) = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + 6, -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$

よって, 曲線  $C_1, C_3$  のグラフは右の図のようになる.

したがって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-4}^0 \left\{ \frac{2}{3}(-x^2 - 2x + 8) - (-x^2 - 4x) \right\} dx \\ = \frac{1}{3} \int_{-4}^0 (x^2 + 8x + 16) dx \\ = \frac{1}{3} \int_{-4}^0 (x+4)^2 dx \\ = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3}(x+4)^3 \right]_{-4}^0 = \frac{64}{9} \end{aligned}$$



17 [2000センター]

解説

$$g(x) = \int f(x) dx = \int (-3x^2 + 12) dx = -x^3 + 12x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(1)  $g'(x) = f(x) = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$

よって,  $y = g(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	...	-2	...	2	...
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	↘	極小	↗	極大	↘

ゆえに,  $x = -2$  のとき

$$\text{極小値 } g(-2) = -16 + C,$$

$x = 2$  のとき

$$\text{極大値 } g(2) = 16 + C \text{ をとる.}$$

(2)  $y = g(x)$  のグラフが異なる 3 点で  $x$  軸と交わる

ための条件は,  $y = g(x)$  の極値について

$$(\text{極小値}) < 0 \text{ かつ } (\text{極大値}) > 0$$

となることである.

よって, (1) から  $-16 + C < 0$  かつ  $16 + C > 0$

ゆえに  $-16 < C < 16$

(3)  $x$  の値が  $-2$  から  $2$  まで変化するときの  $g(x)$  の平均変化率は

$$\frac{g(2) - g(-2)}{2 - (-2)} = \frac{16 + C - (-16 + C)}{4} = 8$$

また, 直線  $y = 8x + 2$  が曲線  $y = g(x)$  の接線となるとき, その接点の  $x$  座標を  $\alpha$  とすると

$$g(\alpha) = 8\alpha + 2 \quad \text{①}, \quad g'(\alpha) = 8 \quad \text{②}$$

① から  $-\alpha^3 + 12\alpha + C = 8\alpha + 2$

よって  $C = \alpha^3 - 4\alpha + 2$  …… ③

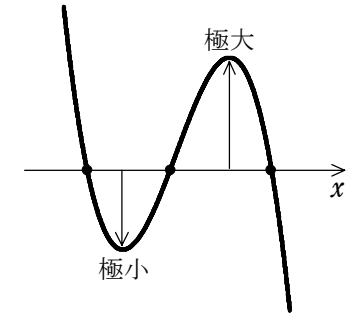
② から  $-3\alpha^2 + 12 = 8$

よって  $\alpha^2 = \frac{4}{3}$  ゆえに  $\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

③ から,  $\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$  のとき  $C = 2 - \frac{16\sqrt{3}}{9}$

$\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}$  のとき  $C = 2 + \frac{16\sqrt{3}}{9}$

したがって  $C = 2 \pm \frac{16\sqrt{3}}{9}$



18 [1999センター]

解説

(1)  $y' = -2x + 2$  から, 接線  $l_1$  は点  $P$  を通り, 傾き  $-2a + 2$  の直線である.

ゆえに  $l_1: y = (-2a + 2)x + a^2$

$l_2: y = 2x$  であるから, 点  $Q$  の座標は  $(\frac{a}{2}, a)$

$$(2) S_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx = \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{24}$$

(3)  $y = px^2 + qx + r$  が、3点  $O(0, 0)$ ,  $P(a, -a^2 + 2a)$ ,  $Q\left(\frac{a}{2}, a\right)$  を通るから

$$r = 0, -a^2 + 2a = pa^2 + qa + r, a = \frac{pa^2}{4} + \frac{qa}{2} + r$$

これを解いて  $p = -2, q = a + 2, r = 0$

$$S_2 = \int_0^a \{(px^2 + qx + r) - (-x^2 + 2x)\} dx = \int_0^a (-x^2 + ax) dx = -\left[-\frac{1}{6}(a-0)^3\right] = \frac{a^3}{6}$$

したがって  $S_2 = 4S_1$

19 [1999センター]

解説

$$(1) g(x) = 3 \int_1^x (t^2 - 4t - 5) dt = \left[ t^3 - 6t^2 - 15t \right]_1^x = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$$

$$(2) g'(x) = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

$g'(x) = 0$  とすると  $x = -1, 5$

また  $g(-1) = 28, g(5) = -80$

よって  $x = -1$  のとき 極大値  $28, x = 5$  のとき 極小値  $-80$

(3)  $g'(x) = 3(x-2)^2 - 27$  であるから、 $g'(x) = a$  となる  $x$  の値がただ1つ存在するのは  $a = -27$  のとき.

このとき、接点の座標は  $(2, g(2))$  すなわち  $(2, -26)$

接線の方程式は  $y + 26 = -27(x - 2)$  すなわち  $y = -27x + 28$

20 [1999センター]

解説

$$(1) 3x^2 = -2x + 1 \text{ から } (x+1)(3x-1) = 0 \quad \text{ゆえに } x = -1, \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ 点 } P \text{ は } C_1, C_2 \text{ 上の点であるから } v = 3u^2 \dots \textcircled{1} \quad v = -u^2 + au + b \dots \textcircled{2}$$

点  $P$  における  $C_1$  と  $C_2$  の接線が一致するから  $6u = -2u + a \dots \textcircled{3}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } u = \frac{1}{8}a, v = \frac{3}{64}a^2, b = -\frac{1}{16}a^2$$

よって、 $C_2$  を表す関数を  $a$  を用いて表すと  $y = -x^2 + ax - \frac{1}{16}a^2$

$$l \text{ が } C_2 \text{ の接線ならば } -x^2 + ax - \frac{1}{16}a^2 = -2x + 1$$

すなわち  $16x^2 - 16(a+2)x + a^2 + 16 = 0$  の判別式  $D$  について  $D = 0$

$$\text{よって } 8^2(a+2)^2 - 16(a^2 + 16) = 0$$

$$\text{ゆえに } 3a^2 + 16a = 0 \quad a \geq 0 \text{ から } a = 0$$

このとき  $b = 0$  となり、 $Q\left(\frac{a+2}{2}, -2 \cdot \frac{a+2}{2} + 1\right)$  から  $Q(1, -1)$

$$(3) \int_{\frac{1}{3}}^1 \{-2x + 1 - (-x^2)\} dx = \frac{8}{81}$$

21 [1998センター]

解説

(1)  $C_1: y = k(x+1)^2$  とおける.

また、点  $P$  の  $x$  座標を  $\alpha$  とおく.

$$C_1 \text{ について } y' = 2k(x+1) \text{ であるから } 2k(\alpha+1) = 2a \dots \textcircled{1}$$

また、 $C_1$  と  $l$  がともに点  $P$  を通るから  $k(\alpha+1)^2 = 2a \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から、} k \text{ を消去すると } a(\alpha+1) = 2a \alpha \quad \text{ゆえに } \alpha = 1$$

$$\text{このとき、} \textcircled{1} \text{ から } k = \frac{a}{2} \quad \text{ゆえに } P(1, 2a), C_1: y = \frac{a}{2}(x+1)^2$$

次に、点  $P$  での  $C_2$  の接線の傾きを  $n$  とすると、 $l$  と直交するから  $n \cdot 2a = -1$

$$\text{ゆえに } n = \frac{-1}{2a}$$

$C_2: y = p(x-q)^2$  について  $y' = 2p(x-q)$  であるから、点  $P$  における接線の傾きについて

$$2p(1-q) = \frac{-1}{2a} \dots \textcircled{3}$$

また、 $C_2$  が点  $P$  を通るから  $p(1-q)^2 = 2a \dots \textcircled{4}$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から、} p \text{ を消去すると } \frac{-1}{4a}(1-q) = 2a \quad \text{ゆえに } q = 1 + 8a^2$$

$$\textcircled{3} \text{ から } p = \frac{1}{32a^3} \quad \text{したがって } C_2: y = \frac{1}{32a^3} \{x - (1 + 8a^2)\}^2$$

$$(2) S_1 = \int_{-1}^1 \frac{a}{2}(x+1)^2 dx = \frac{a}{2} \left[ \frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}a$$

$$S_2 = \int_1^{1+8a^2} \frac{1}{32a^3} \{x - (1 + 8a^2)\}^2 dx = \frac{1}{32a^3} \int_0^{8a^2} (x - 8a^2)^2 dx$$

$$= \frac{1}{32a^3} \left[ \frac{(x - 8a^2)^3}{3} \right]_0^{8a^2} = \frac{16}{3} a^3$$

$$3S_1 = S_2 \text{ とすると } 4a = \frac{16}{3}a^3$$

$$a > 0 \text{ から } a = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

22 [1998センター]

解説

$x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3$  から、放物線  $y = g(x)$  の頂点は  $(3, 3)$

$$x^2 = x^2 - 6x + 12 \text{ を解くと } x = 2$$

よって、2つの放物線  $y = x^2, y = x^2 - 6x + 12$  は、点  $(2, 4)$  で交わる。

$y = x^2$  上の点  $(a, a^2)$  における接線  $l$  の方程式は  $y = 2a(x - a) + a^2$  すなわち

$$y = 2ax - a^2 \text{ である。}$$

これが、 $y = x^2 - 6x + 12$  にも接するならば  $x^2 - 6x + 12 = 2ax - a^2$  すなわち

$$x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 12 = 0 \text{ の左辺が完全平方であればよい。}$$

$$(左辺) = \{x - (a + 3)\}^2 - 6a + 3 \text{ であるから } -6a + 3 = 0 \quad \text{ゆえに } a = \frac{1}{2}$$

このとき (左辺) =  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$  となるから、直線  $l$  と放物線  $y = g(x), y = f(x)$  との接点の

$x$  座標は、それぞれ  $\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$  である。

よって、求める面積は

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_2^{\frac{7}{2}} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^2 + \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)^3\right]_{2}^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{4}$$

23 [1998センター]

解説

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - px^2 + 4 \text{ から } f'(x) = x^2 - 2px = x(x - 2p)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とおくと } x = 0, 2p$$

$p > 0$  であるから、右の増減表により  $x = 0$  で

極大値  $f(0) = 4$  をとり、 $x = 2p$  で極小値

$$f(2p) = \frac{8}{3}p^3 - 4p^3 + 4 = \frac{4}{3}p^3 + 4 \text{ をとる。}$$

$x$	...	0	...	$2p$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a = 0, b = 2p$  であるから、A  $(0, 4)$ , B  $\left(0, -\frac{4}{3}p^3 + 4\right)$ , C  $\left(2p, -\frac{4}{3}p^3 + 4\right)$ , D  $(2p, 4)$

四角形 ABCD が正方形になるとき

$$2p - 0 = 4 - \left(-\frac{4}{3}p^3 + 4\right) \text{ すなわち } 2p = \frac{4}{3}p^3$$

$$\text{ゆえに、} p > 0 \text{ から } p = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

24 [1998センター]

解説

$$(1) y = \frac{1}{2}x^2 \text{ から } y' = x$$

$$Q\left(q, \frac{1}{2}q^2\right) \text{ とおくと } l_1 \perp l_2 \text{ から } aq = -1 \quad \text{ゆえに } q = -\frac{1}{a}$$

したがって、Q の  $x$  座標は  $\frac{a-1}{a}$  である。

$$\text{また、} l_2 \text{ の方程式は } y = -\frac{1}{a}\left(x + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2a^2} \text{ すなわち } y = -\frac{1}{a}x - \frac{1}{2a^2}$$

(2)  $l_1$  の方程式は  $y = a(x - a) + \frac{1}{2}a^2$  すなわち  $y = ax - \frac{1}{2}a^2$  であるから、求める面積

$$\text{は } \int_b^a \left(\frac{1}{2}x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2\right) dx = \frac{1}{2} \int_b^a (x - a)^2 dx = \frac{1}{6}(a - b)^3$$

$$(3) ax - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}x - \frac{1}{2a^2} \text{ とおくと } x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

よって、(2) を利用すると、求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{a}x + \frac{1}{2a^2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)}^a \left(\frac{1}{2}x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2\right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} \right\}^3 + \frac{1}{6} \left\{ a - \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{48} \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + \frac{1}{48} \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1}{24} \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 \end{aligned}$$

25 [1998センター]

解説

$ax^2 + bx + 1 = 2$  すなわち  $ax^2 + bx - 1 = 0$  が  $x = c$  を重解にもつから

$$b^2 + 4a = 0 \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{かつ } c = -\frac{b}{2a} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } (-2ac)^2 + 4a = 0$$

$a \neq 0$  から  $a = \frac{ア-1}{ウc^{-2}}$  ゆえに  $b = -2ac = \frac{オ2}{カc}$

このとき  $-\frac{1}{c^2}x^2 + \frac{2}{c}x + 1 = 0$  から  $x^2 - 2cx - c^2 = 0$

$x > 0$  であるから  $x = (1 + \sqrt{2})c$

よって、直線 AB は  $y = -\frac{1}{(1 + \sqrt{2})c}x + 1$  すなわち  $y = \frac{キ1 - \sqrt{ク2}}ケc}x + 1$  と表される。

また、面積について

$$1 = \int_0^{(1+\sqrt{2})c} \left( -\frac{1}{c^2}x^2 + \frac{2}{c}x + 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{c}x - 1 \right) dx = -\frac{1}{6} \left( -\frac{1}{c^2} \right) \{ (1+\sqrt{2})c - 0 \}^3$$

$$= \frac{1}{6c^2} (7+5\sqrt{2})c^3 = \frac{7+5\sqrt{2}}{6}c$$

ゆえに  $c = \frac{6}{7+5\sqrt{2}} = \frac{キ6(\sim5\sqrt{ク2} - セ7)}{}$

26 [1997センター]

解説

(1)  $x^2 + 2ax + 3a^2 + 3a + 12 = (x+a)^2 + 2a^2 + 3a + 12$  であるから、頂点の座標は  $(-a, 2a^2 + 3a + 12)$   $x = -a, y = 2a^2 + 3a + 12$  とおいて、 $a$  を消去すると  $y = \frac{ア2x^2 - イ3x + ウ12}{}$

(2)  $x^2 + 2ax + 3a^2 + 3a + 12 = -x^2 - 10x$  すなわち  $2x^2 + 2(a+5)x + 3a^2 + 3a + 12 = 0$  の判別式  $D$  について、 $D > 0$  が求める条件。

よって  $D/4 = (a+5)^2 - 2(3a^2 + 3a + 12) > 0$  から  $5a^2 - 4a - 1 < 0$

ゆえに  $(5a+1)(a-1) < 0$  よって  $-\frac{オ1}{カ5} < a < キ1$

また、1点を共有する条件は  $D=0$  よって  $a = ケ1$  または  $a = -\frac{ク1}{セ5}$

$a=1$  のとき、接点の  $x$  座標は  $-\frac{1+5}{2} = -3$

また  $y = -x^2 - 10x$  より  $y' = -2x - 10$  であるから、接線の方程式は  $y = \{ -2(-3) - 10 \} (x+3) - (-3)^2 - 10(-3)$

ゆえに  $y = -サ4x + シ9$

(3)  $x^2 + 12 = -x^2 - 10x$  とすると  $x^2 + 5x + 6 = 0$  から  $(x+3)(x+2) = 0$

ゆえに  $x = \text{ソセ} -2, \text{タ} -3$

面積は  $\int_{-3}^{-2} \{ (-x^2 - 10x) - (x^2 + 12) \} dx = -2 \int_{-3}^{-2} (x+3)(x+2) dx$   
 $= \frac{2\{-2 - (-3)\}^3}{6} = \frac{キ1}{ク3}$

27 [1997センター]

解説

$y = ax^2 + 2 - 12a$  から  $a(x^2 - 12) + 2 - y = 0$

よって  $x^2 - 12 = 0, 2 - y = 0$  から  $x = \pm 2\sqrt{3}, y = 2$

ゆえに、定点  $(\pm 2\sqrt{3}, 2)$  を通る。

①, ② から  $x^2$  を消去すると  $y = a(16 - y^2) + 2 - 12a$

ゆえに  $ay^2 + y - (4a + 2) = 0$

よって  $(ay + 2a + 1)(y - 2) = 0$  から  $y = -\frac{2a+1}{a}, 2$

ここで  $-\frac{2a+1}{a} = -2 - \frac{1}{a} < -4$

② より  $-4 \leq y \leq 4$  であるから、これは不適。ゆえに  $y = 2$

よって、放物線 ① と円 ② の交点の  $x$  座標は  $x^2 + 2^2 = 16$  から  $x = \pm 2\sqrt{3}$

また、 $a = \frac{1}{4}$  のとき、① は  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

ゆえに、 $A(0, 4), B(2\sqrt{3}, 2)$  とすると

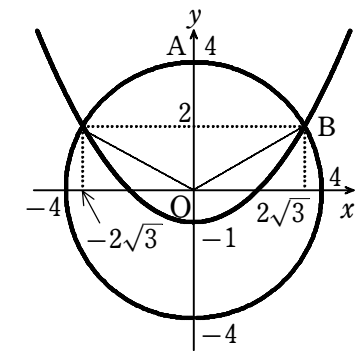
$\angle AOB = 60^\circ, OB: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  であることと、

図形の対称性から、求める面積は

$$2 \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x - \left( \frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right\} dx$$

$$= \frac{16}{3}\pi + 2 \left[ -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2\sqrt{3}} + x \right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{オ4\sqrt{カ3}}{ク3} + \frac{キ16}{ク3}\pi$$



28 [1997センター]

解説

$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$  から  $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}$

よって、点 A における接線の方程式は  $y - \left( a^3 - \frac{4}{3}a \right) = \left( 3a^2 - \frac{4}{3} \right) (x - a)$

すなわち  $y = \left( 3^{\frac{1}{3}} a^2 - \frac{4}{3} \right) x - 2^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$

これが点 B を通るから  $b^3 - \frac{4}{3}b = \left( 3a^2 - \frac{4}{3} \right) b - 2a^3$

ゆえに  $b^3 - 3a^2b + 2a^3 = 0$

因数分解して  $(b-a)^2(b+2a) = 0$

$a \neq b$  であるから  $b = 2a$  …… ①

点 B における接線と点 A における接線が直交するから

$$\left( 3a^2 - \frac{4}{3} \right) \left( 3b^2 - \frac{4}{3} \right) = -1$$

① を代入して整理すると  $36a^4 - 20a^2 + \frac{25}{9} = 0$

よって  $\left( 6a^2 - \frac{5}{3} \right)^2 = 0$  ゆえに  $a^2 = \frac{5}{18}$

**29** [1997センター]

解説

直線  $l$  の方程式は  $y - 1 = a(x - 1)$

すなわち  $y = ax - a + 1$

直線  $l$  と放物線  $C$  の交点の  $x$  座標は  $x^2 = ax - a + 1$  の解である.

$x^2 = ax - a + 1$  から  $x^2 - ax + a - 1 = 0$

よって  $(x-1)(x-(a-1)) = 0$

ゆえに、交点の  $x$  座標は  $x = 1, a - 1$

$a - 1 < 0$  のとき

$$S = \int_{a-1}^0 (ax - a + 1 - x^2) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - (a-1)x \right]_{a-1}^0$$

$$= \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{a}{2}(a-1)^2 + (a-1)^2$$

$$= \frac{(a-1)^2}{6} \{ 2(a-1) - 3a + 6 \} = \frac{(a-1)^2(4-a)}{6}$$

**30** [1997センター]

解説

$y = \frac{a}{2}x^2, y = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{1+a}$  から  $\frac{a}{2}x^2 = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{1+a}$

ゆえに  $a \left( x^2 - \frac{1}{1+a} \right) = 0$

$a > 0$  であるから  $x^2 = \frac{1}{1+a}$

よって  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a}}$  (または  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{a+1}}$ )

ゆえに、面積  $S$  は

$$S = \int_{-\frac{1}{\sqrt{1+a}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left( -\frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{1+a} - \frac{a}{2}x^2 \right) dx = -a \int_{-\frac{1}{\sqrt{1+a}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left( x^2 - \frac{1}{1+a} \right) dx$$

$$= -a \int_{-\frac{1}{\sqrt{1+a}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left( x + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) \left( x - \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) dx$$

$$= a \times \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{a}{(\sqrt{1+a})^3} \dots\dots ①$$

$t = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$  とおくと、 $a > 0$  であるから  $0 < t < 1$

また  $a = \frac{1}{t^2} - 1$  …… ②

①, ② から  $S = \frac{4}{3} \times \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) t^3 = \frac{4}{3} (t - t^3)$

$S' = \frac{4}{3} (1 - 3t^2)$  から、 $S' = 0$  とすると  $t^2 = \frac{1}{3}$

$0 < t < 1$  であるから  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 < t < 1$  の範囲における関数  $S$  の増減表は次のようになる.

$t$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$S'$		+	0	-	
$S$		↗	極大	↘	

よって、 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき、 $S$  は最大値をとる.

したがって、 $a = 2$  のとき面積  $S$  は最大となり、その値は  $\frac{4}{3} \times \frac{2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{8}{27} \sqrt{3}$  である.

**31** [2006センター]

解説

(1)  $y = x^2$  を微分すると  $y' = 2x$

よって、点  $(t, t^2)$  における  $C_1$  の接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 \quad \dots\dots ①$$

この直線が  $C_2$  に接するとき、2次方程式

$$x^2 - 4ax + 4a(a+1) = 2tx - t^2$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - 2(t+2a)x + t^2 + 4a(a+1) = 0 \quad \dots\dots ②$$

が重解をもつ。

$$\text{よって、②の判別式を } D \text{ とすると} \quad \frac{D}{4} = (t+2a)^2 - \{t^2 + 4a(a+1)\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad 4at - 4a = 0 \quad a > 0 \text{ であるから} \quad t = 1$$

$$\text{直線 } \ell \text{ の方程式は、} t=1 \text{ を①に代入して} \quad y = 2x - 1 \quad \dots\dots ③$$

$$t=1 \text{ のとき、②を解くと} \quad x = 2a + 1$$

よって、 $\ell$  と  $C_2$  の接点の  $x$  座標は  $x = 2a + 1$

$$y \text{ 座標は、} x = 2a + 1 \text{ を③に代入して} \quad y = 2(2a + 1) - 1 = 4a + 1$$

したがって、接点の座標は  $(2a + 1, 4a + 1)$

**別解**  $y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$  を微分すると  $y' = 2x - 4a$

①が  $C_2$  に接するとき、接点の  $x$  座標を  $s$  とすると

$$2s - 4a = 2t \quad \dots\dots ④, \quad s^2 - 4as + 4a(a+1) = 2ts - t^2 \quad \dots\dots ⑤$$

が成り立つ。

$$\text{④から} \quad s = t + 2a \quad \dots\dots ⑥$$

$$\text{⑤に代入して} \quad (t+2a)^2 - 4a(t+2a) + 4a(a+1) = 2t(t+2a) - t^2$$

$$\text{整理すると} \quad -4at + 4a = 0 \quad a > 0 \text{ であるから} \quad t = 1$$

$$\text{直線 } \ell \text{ の方程式は、} t=1 \text{ を①に代入して} \quad y = 2x - 1$$

$$\text{⑥から、} t=1 \text{ のとき} \quad s = 2a + 1$$

$$\text{このとき} \quad 2s - 1 = 2(2a + 1) - 1 = 4a + 1$$

よって、接点の座標は  $(2a + 1, 4a + 1)$

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の交点  $P$  の  $x$  座標は、方程式  $x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$  の解である。

$$\text{整理すると} \quad 4ax = 4a(a+1) \quad a > 0 \text{ であるから} \quad x = a + 1$$

よって、 $P$  の座標は  $(a + 1, (a + 1)^2)$

$P$  を通って直線  $\ell : y = 2x - 1$  に平行な直線  $m$  の方程式は

$$y - (a + 1)^2 = 2\{x - (a + 1)\} \quad \text{すなわち} \quad y = 2x + a^2 - 1$$

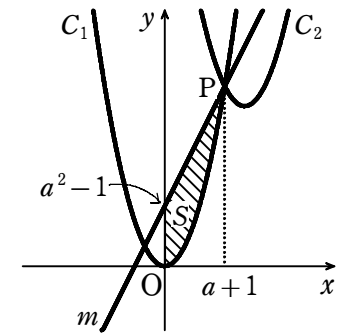
$m$  と  $y$  軸との交点の  $y$  座標は  $a^2 - 1$

この  $y$  座標が正となるとき  $a^2 - 1 > 0$  よって  $a < -1, 1 < a$

$a > 0$  であるから  $a > 1$

$a > 1$  のとき、 $C_1$  の  $x \geq 0$  の部分と直線  $m$  および  $y$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a+1} \{(2x + a^2 - 1) - x^2\} dx \\ &= \left[ x^2 + (a^2 - 1)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{a+1} \\ &= (a+1)^2 + (a^2 - 1)(a+1) - \frac{(a+1)^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}(a+1)^2 \{3 + 3(a-1) - (a+1)\} \\ &= \frac{1}{3}(a+1)^2 (2a-1) \end{aligned}$$



**32** [2006センター]

**解説**

(1)  $y = x^3 - 3x^2$  を微分すると  $y' = 3x^2 - 6x$

よって、点  $Q(t, t^3 - 3t^2)$  における  $C$  の接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t^2) = (3t^2 - 6t)(x - t)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2$$

$$\text{これが点 } P(3, a) \text{ を通るとき} \quad a = (3t^2 - 6t) \cdot 3 - 2t^3 + 3t^2$$

$$\text{よって} \quad -2t^3 + 12t^2 - 18t = a \quad \dots\dots ①$$

$f(t) = -2t^3 + 12t^2 - 18t$  とおくと

$$f'(t) = -6t^2 + 24t - 18 = -6(t-1)(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると} \quad t = 1, 3$$

$f(t)$  の増減表は右ようになる。

$t$	...	1	...	3	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘

よって、 $f(t)$  は  $t = 1$  のとき極小、 $t = 3$  のとき極大になる。

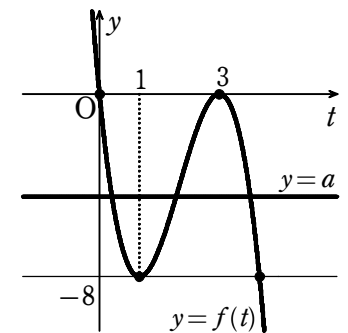
3次関数のグラフでは、接点が異なれば接線も異なる。したがって、 $P$  を通る  $C$  の接線の本数が2本となるのは、 $t$  の方程式①の異なる実数解の個数が2個のときである。

よって、 $y = f(t)$  のグラフと直線  $y = a$  の共有点が2個となる  $a$  の値を求めて

$$a = 0, -8$$

$$a = 0 \text{ のとき、①は} \quad -2t^3 + 12t^2 - 18t = 0$$

$$\text{すなわち} \quad -2t(t-3)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 0, 3$$



接線の傾きは  $3t^2 - 6t$  であり、 $g(t) = 3t^2 - 6t$  とすると  
 $g(0) = 0, g(3) = 27 - 18 = 9$

よって、 $a = 0$  のときの2本の接線の傾きは  $\sphericalangle 0$  と  $\sphericalangle 9$  (または  $\sphericalangle 9$  と  $\sphericalangle 0$ )

(2)  $g(t) = 3t(t - 2)$  であるから、 $t < 0, 2 < t$  のとき  $g(t) > 0$  となり、接線の傾きは正になる。また、 $0 < t < 2$  のとき  $g(t) < 0$  となり、接線の傾きは負になる。

また  $f(2) = -16 + 48 - 36 = -4$

[1]  $a = 2$  のとき

図から、①はただ1つの実数解をもち、その解は  $t < 0$  の範囲にある。

よって、接線は1本で、傾きは正になる。(セ⑩)

[2]  $a = -2$  のとき

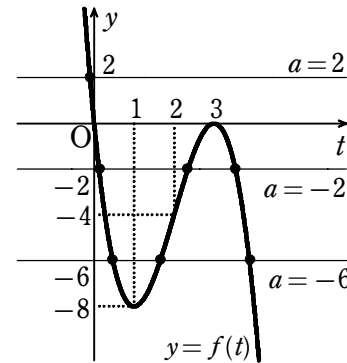
図から、①は異なる3つの実数解をもち、そのうち2つは  $t > 2$  の範囲にあり、他の1つは  $0 < t < 2$  の範囲にある。

よって、接線は3本で、傾きは2本が正、他の1本は負になる。(ソ④)

[3]  $a = -6$  のとき

図から、①は異なる3つの実数解をもち、そのうち1つは  $t > 2$  の範囲にあり、他の2つは  $0 < t < 2$  の範囲にある。

よって、接線は3本で、傾きは1本が正、他の2本は負になる。(タ③)



33 [2006センター]

解説

(1)  $y = x^2$  を微分すると  $y' = 2x$

よって、点  $(t, t^2)$  における  $C_1$  の接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 \quad \dots\dots ①$$

この直線が  $C_2$  に接するとき、2次方程式

$$x^2 - 4ax + 4a(a + 1) = 2tx - t^2$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - 2(t + 2a)x + t^2 + 4a(a + 1) = 0 \quad \dots\dots ②$$

が重解をもつ。

$$\text{よって、②の判別式を } D \text{ とすると} \quad \frac{D}{4} = (t + 2a)^2 - \{t^2 + 4a(a + 1)\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad 4at - 4a = 0 \quad a > 0 \text{ であるから} \quad t = 1$$

$$\text{直線 } \ell \text{ の方程式は、} t = 1 \text{ を①に代入して} \quad y = 2x - 1 \quad \dots\dots ③$$

$$t = 1 \text{ のとき、②を解くと} \quad x = 2a + 1$$

よって、 $\ell$  と  $C_2$  の接点の  $x$  座標は  $x = 2a + 1$

$y$  座標は、 $x = 2a + 1$  を③に代入して  $y = 2(2a + 1) - 1 = 4a + 1$

したがって、接点の座標は  $(2a + 1, 4a + 1)$

別解  $y = x^2 - 4ax + 4a(a + 1)$  を微分すると  $y' = 2x - 4a$

①が  $C_2$  に接するとき、接点の  $x$  座標を  $s$  とすると

$$2s - 4a = 2t \quad \dots\dots ④, \quad s^2 - 4as + 4a(a + 1) = 2ts - t^2 \quad \dots\dots ⑤$$

が成り立つ。

$$\text{④から} \quad s = t + 2a \quad \dots\dots ⑥$$

$$\text{⑤に代入して} \quad (t + 2a)^2 - 4a(t + 2a) + 4a(a + 1) = 2t(t + 2a) - t^2$$

$$\text{整理すると} \quad -4at + 4a = 0 \quad a > 0 \text{ であるから} \quad t = 1$$

$$\text{直線 } \ell \text{ の方程式は、} t = 1 \text{ を①に代入して} \quad y = 2x - 1$$

$$\text{⑥から、} t = 1 \text{ のとき} \quad s = 2a + 1$$

$$\text{このとき} \quad 2s - 1 = 2(2a + 1) - 1 = 4a + 1$$

よって、接点の座標は  $(2a + 1, 4a + 1)$

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の交点  $P$  の  $x$  座標は、方程式  $x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a + 1)$  の解である。

$$\text{整理すると} \quad 4ax = 4a(a + 1) \quad a > 0 \text{ であるから} \quad x = a + 1$$

よって、 $P$  の座標は  $(a + 1, (a + 1)^2)$

$P$  を通って直線  $\ell : y = 2x - 1$  に平行な直線  $m$  の方程式は

$$y - (a + 1)^2 = 2\{x - (a + 1)\} \quad \text{すなわち} \quad y = 2x + a^2 - 1$$

$m$  と  $y$  軸との交点の  $y$  座標は  $a^2 - 1$

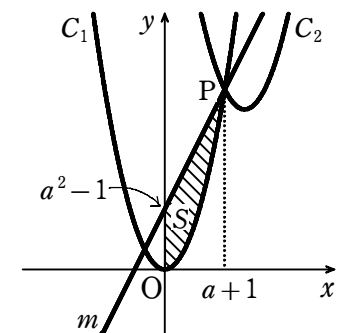
$$\text{この} y \text{ 座標が正となるとき} \quad a^2 - 1 > 0 \quad \text{よって} \quad a < -1, 1 < a$$

$a > 0$  であるから  $a > 1$

$a > 1$  のとき、 $C_1$  の  $x \geq 0$  の部分と直線  $m$  および  $y$  軸

で囲まれた図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a+1} \{(2x + a^2 - 1) - x^2\} dx \\ &= \left[ x^2 + (a^2 - 1)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{a+1} \\ &= (a + 1)^2 + (a^2 - 1)(a + 1) - \frac{(a + 1)^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}(a + 1)^2 \{3 + 3(a - 1) - (a + 1)\} \\ &= \frac{1}{3}(a + 1)^2 (2a - 1) \end{aligned}$$



34 [2005センター]

解説

(1)  $y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2 = (x+a)^2 - a^3 - 3a^2$

よって、頂点 P の座標は  $(-a, -a^3 - 3a^2)$

P(x, y) とすると  $x = -a \dots\dots ①, y = -a^3 - 3a^2 \dots\dots ②$

① から  $a = -x$  ② に代入して  $y = x^3 - 3x^2$

したがって、どのような定数 a についても、頂点 P は  $y = x^3 - 3x^2$  のグラフ上にある。

(2) ② の両辺を a について微分すると  $y' = -3a^2 - 6a = -3a(a+2)$

$-3 \leq a < 1$  における y の増減表は、次のようになる。

a	-3	...	-2	...	0	...	1
y'		-	0	+	0	-	
y	0	↘	-4	↗	0	↘	(-4)

よって、頂点 P の y 座標の値が最大となるのは  $a = 0$  と  $a = -3$  のときであり、最小となるのは  $a = -2$  のときである。

(3)  $C_1: y = x^2, C_2: y = x^2 - 6x + 9, C_3: y = x^2 - 4x$  となる。

$x^2 = x^2 - 6x + 9$  とすると  $x = \frac{3}{2}$

よって、 $C_1$  と  $C_2$  の交点の x 座標は  $\frac{3}{2}$

$x^2 = x^2 - 4x$  とすると  $x = 0$  よって、 $C_1$  と  $C_3$  の交点の x 座標は  $0$

$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 4x$  とすると  $x = \frac{9}{2}$

よって、 $C_2$  と  $C_3$  の交点の x 座標は  $\frac{9}{2}$

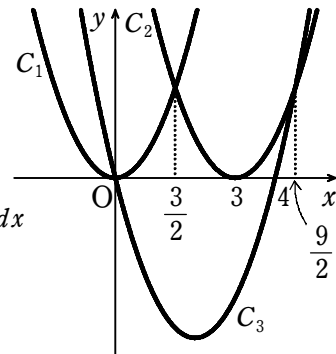
(4)  $C_1, C_2, C_3$  を図示すると、右のようになる。

よって ③

三つの放物線  $C_1, C_2, C_3$  で囲まれた図形の面積を S とすると、右の図から

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} \{x^2 - (x^2 - 4x)\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \{(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 4x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} 4x dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} (-2x + 9) dx$$



$$= \left[ 2x^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[ -x^2 + 9x \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$$

35 [2005センター]

解説

(1)  $y = x^2$  を微分すると  $y' = 2x$

$x = 1$  のとき  $y' = 2$

よって、接線 l の方程式は  $y - 1 = 2(x - 1)$  すなわち  $y = 2x - 1$

$y = ax^2 + bx + c$  を微分すると  $y' = 2ax + b$

よって、接線 m の傾きは  $2a \cdot 1 + b = 2a + b$

l と m が直交しているから  $2 \cdot (2a + b) = -1$

ゆえに  $b = -2a - \frac{1}{2} \dots\dots ①$

また、放物線 D が点 P を通るから  $1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

よって  $c = -a - b + 1$

これに ① を代入して

$$c = -a - \left(-2a - \frac{1}{2}\right) + 1 = a + \frac{3}{2} \dots\dots ②$$

①, ② から、放物線 D の方程式は

$$y = ax^2 - \left(2a + \frac{1}{2}\right)x + a + \frac{3}{2} \dots\dots ③$$

これを变形すると

$$\begin{aligned} y &= a \left\{ x^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{4a}\right)x \right\} + a + \frac{3}{2} = a \left\{ x - \left(1 + \frac{1}{4a}\right) \right\}^2 - a \left(1 + \frac{1}{4a}\right)^2 + a + \frac{3}{2} \\ &= a \left\{ x - \left(1 + \frac{1}{4a}\right) \right\}^2 + 1 - \frac{1}{16a} \end{aligned}$$

よって、放物線 D の頂点 Q は

$$Q \left( 1 + \frac{1}{4a}, 1 - \frac{1}{16a} \right)$$

Q(x, y) とすると

$$x = 1 + \frac{1}{4a} \dots\dots ④, \quad y = 1 - \frac{1}{16a} \dots\dots ⑤$$

④ から  $\frac{1}{4a} = x - 1$

これを ⑤ に代入して  $y = 1 - \frac{1}{4}(x - 1)$

すなわち  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

したがって、 $a$  の値が変化するとき、頂点  $Q$  は直線  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$  上を動く。

(2) 点  $Q$  が放物線  $C: y = x^2$  上の点になるとき  $1 - \frac{1}{16a} = \left(1 + \frac{1}{4a}\right)^2$

よって  $1 - \frac{1}{16a} = 1 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{16a^2}$

両辺に  $16a^2$  ( $\neq 0$ ) を掛けて整理すると  $9a + 1 = 0$

ゆえに  $a = \frac{-1}{9}$

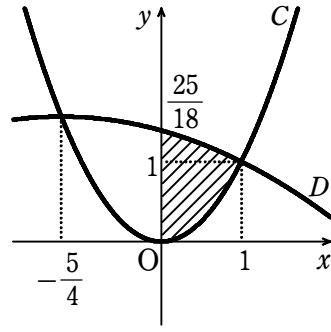
このとき、③ から放物線  $D$  の方程式は

$$y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{25}{18}$$

2つの放物線  $C$  と  $D$  は右の図のようになるから、

求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \left( -\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{25}{18} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= -\frac{5}{18} \int_0^1 (4x^2 + x - 5) dx = -\frac{5}{18} \left[ \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x \right]_0^1 \\ &= -\frac{5}{18} \cdot \left( -\frac{19}{6} \right) = \frac{95}{108} \end{aligned}$$



36 [2005センター]

解説

(1) ●  $f'(x) = 6x^2 - 2ax + b = 6\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 + b - \frac{a^2}{6}$

$f(x)$  が (★) を満たすための条件は、方程式  $f'(x) = 0$  が  $0 < x < 1$  の範囲に二つの異なる解をもつことである。したがって、 $x$  が実数全体を動くときの導関数  $f'(x)$  の最小値  $b - \frac{a^2}{6}$  は負である。

よって  $b - \frac{a^2}{6} < 0$  ゆえに  $b < \frac{a^2}{6}$  …… ①

●  $f'(x)$  が最小値をとる  $x$  の値  $\frac{a}{6}$  は 0 と 1 の間にある。よって  $0 < \frac{a}{6} < 1$

ゆえに  $0 < a < 6$  …… ②

●  $f'(0)$  と  $f'(1)$  の値はともに正である。(㉞ ③)  
よって

$f'(0) = b > 0$  …… ③

$f'(1) = 6 - 2a + b > 0$  …… ④

①, ②, ③, ④ を同時に満たす点  $(a, b)$  全体を座標平面上に図示すると、右の図の斜線部分のようになる。

(放物線  $b = \frac{a^2}{6}$  と直線  $b = 2a - 6$  は点  $(6, 6)$  で接している。)

よって ㉞ ③

この斜線部分の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 \frac{a^2}{6} da - \frac{1}{2} \cdot (6-3) \cdot 6 \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{a^3}{3} \right]_0^6 - 9 = 12 - 9 = 3 \end{aligned}$$

(2) ①, ②, ③, ④ を同時に満たす整数  $a, b$  を求める。

② から  $a = 1, 2, 3, 4, 5$

$a = 1$  のとき、①, ③, ④ から  $0 < b < \frac{1}{6}$

これを満たす整数  $b$  は存在しないから、不適。

同様に、 $a = 2$  のとき  $0 < b < \frac{2}{3}$  (不適)

$a = 3$  のとき  $0 < b < \frac{3}{2}$  よって  $b = 1$

$a = 4$  のとき  $2 < b < \frac{8}{3}$  (不適)

$a = 5$  のとき  $4 < b < \frac{25}{6}$  (不適)

以上から  $a = 3, b = 1$

このとき  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

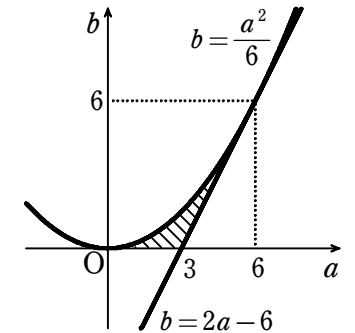
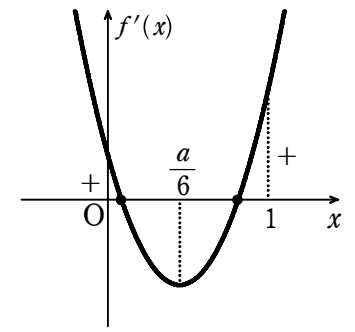
$f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 0$  とすると  $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

$f'(x)$  の符号は  $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  の前後で正から負に変わるから、 $f(x)$  は

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  で極大となる。

また、 $f(x)$  を  $f'(x)$  で割ると、商が  $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$ 、余りが  $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$  となるから



$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)f'(x) - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$$

$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$  のとき,  $f'(x) = 0$  であるから

$$f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって,  $f(x)$  の極大値は  $\frac{\sqrt{3}}{18}$

参考  に入る数は次のように求めてもよい。

に入る数を  $a$  とすると

$$2x^3 - 3x^2 + x = \left(\frac{1}{a}x - \frac{1}{6}\right)(6x^2 - 6x + 1) - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$$

左辺の  $x^3$  の係数は 2

右辺の  $x^3$  の係数は  $\frac{1}{a} \times 6 = \frac{6}{a}$

両者が一致するから  $2 = \frac{6}{a}$  よって  $a = 3$

37 [2005センター]

解説

(1)  $\triangle PQR = \frac{1}{2}QR \cdot PR$  であるから

$$f(t) = \frac{1}{2}t(15 - t^2) = \frac{1}{2}(-t^3 + 15t)$$

$$f'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 15) = \frac{3}{2}(-t^2 + 5)$$

$f'(t) = 0$  とすると  $t = \pm\sqrt{5}$

$0 < t < \sqrt{15}$  における  $f(t)$  の増減表は, 次のようになる。

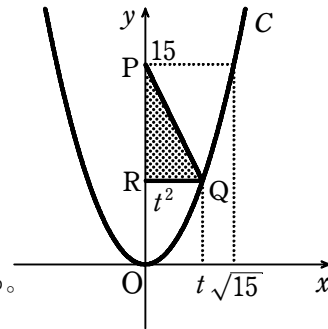
$t$	0	...	$\sqrt{5}$	...	$\sqrt{15}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$5\sqrt{5}$	↘	

よって, 三角形 PQR の面積  $f(t)$  は  $t = \sqrt{5}$  のとき最大値  $5\sqrt{5}$  をとる。

(2)  $PQ^2 = (t-0)^2 + (t^2-a)^2 = t^4 + (1-2a)t^2 + a^2 = T^2 + (1-2a)T + a^2$

$$= \left(T + \frac{1-2a}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(T + \frac{1-2a}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$$

また,  $t^2 \geq 0$  であるから  $T \geq 0$



[1]  $-\frac{1-2a}{2} \geq 0$  すなわち  $a \geq \frac{1}{2}$  のとき

$PQ^2$  は  $T = -\frac{1-2a}{2}$  のとき最小となるから  $g(a) = a - \frac{1}{4}$

[2]  $-\frac{1-2a}{2} < 0$  すなわち  $a < \frac{1}{2}$  のとき

$PQ^2$  は  $T = 0$  のとき最小となるから  $g(a) = 0^2 + (1-2a) \cdot 0 + a^2 = a^2$

$$\text{よって } \int_0^1 g(a) da = \int_0^{\frac{1}{2}} a^2 da + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(a - \frac{1}{4}\right) da = \left[\frac{a^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$$

38 [2004センター]

解説

(1)  $a \neq 1$  であるから  $a+1 \neq 2a$

よって, 2点  $P(a+1, (a+1)^2)$ ,  $Q(2a, 4a^2)$  を通る直線  $l$  の方程式は

$$y = \frac{(a+1)^2 - 4a^2}{a+1-2a}(x-2a) + 4a^2$$

すなわち  $y = \frac{(a+1+2a)(a+1-2a)}{1-a}(x-2a) + 4a^2$

ゆえに  $l: y = (3a+1)x - 2a^2 - 2a$  ..... ①

$b \neq 1$  で, 2点  $R(b+1, (b+1)^2)$ ,  $S(2b, 4b^2)$  を通る直線  $m$  の方程式は, ① において  $a$  を  $b$  におき換えたものである。

よって  $m: y = (3b+1)x - 2b^2 - 2b$  ..... ②

$l$  と  $m$  の交点の座標は, 連立方程式 ①, ② の解である。

$$\text{①} - \text{②} \text{ より } 0 = 3(a-b)x - 2(a-b)(a+b) - 2(a-b)$$

$a \neq b$  であるから, 両辺を  $a-b$  で割って  $0 = 3x - 2(a+b) - 2$

ゆえに  $x = \frac{2}{3}(a+b+1)$

$$\text{① に代入して } y = (3a+1) \cdot \frac{2}{3}(a+b+1) - 2a^2 - 2a$$

$$= 2a(a+b+1) + \frac{2}{3}(a+b+1) - 2a^2 - 2a$$

$$= 2ab + \frac{2}{3}(a+b+1)$$

よって, 交点 T の座標は  $T\left(\frac{2}{3}(a+b+1), 2ab + \frac{2}{3}(a+b+1)\right)$

ここで  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{2}{3}(a+b+1) = \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ 2ab + \frac{2}{3}(a+b+1) \right\} = 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$$

したがって、点 T は点 U  $\left( \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}, 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3} \right)$  に近づく。

(2)  $X = \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$  …… ③,  $Y = 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$  …… ④ とすると  $Y = 2a^2 + X$

また、③ より  $a = \frac{3X-2}{4}$  であるから、これを代入すると

$$Y = 2\left(\frac{3X-2}{4}\right)^2 + X \quad \text{すなわち} \quad Y = \frac{9X^2 - 12X + 4}{8} + X$$

ゆえに  $Y = \frac{9X^2 - 4X + 4}{8}$

よって、点 U は放物線  $D: y = \frac{9x^2 - 4x + 4}{8}$  上にある。

このとき、 $y' = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$  であるから、点 U における D の接線の傾きは

$$\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} = 3a + 1$$

よって、点 U における D の接線の方程式は

$$y = (3a+1)\left(x - \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}\right) + 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$$

これが原点を通るから  $0 = (3a+1)\left(-\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}\right) + 2a^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$

整理すると  $2a(a+1) = 0$  よって  $a = 0, -1$

このとき、接線の傾きはそれぞれ  $3 \cdot 0 + 1 = 1, 3 \cdot (-1) + 1 = -2$

したがって、求める接線の方程式は  $y = x, y = -2x$

**別解** D の接線の方程式は判別式を利用して求めてもよい。

原点を通る D の接線の方程式を  $y = mx$  とおく。

$$\frac{9x^2 - 4x + 4}{8} = mx \quad \text{とすると} \quad 9x^2 - (8m+4)x + 4 = 0$$

この 2 次方程式の判別式が 0 であるから  $(4m+2)^2 - 9 \cdot 4 = 0$

よって  $m^2 + m - 2 = 0$  すなわち  $(m-1)(m+2) = 0$

ゆえに  $m = 1, -2$

よって、接線の方程式は  $y = x, y = -2x$

(3)  $\frac{9x^2 - 4x + 4}{8} = x^2$  とすると  $x^2 - 4x + 4 = 0$

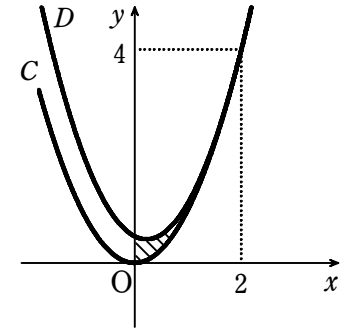
すなわち  $(x-2)^2 = 0$  よって  $x = 2$

このとき  $y = 4$

よって、放物線 C, D は 1 点 (2, 4) を共有する。

ゆえに、求める面積は、右の図から

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left( \frac{9x^2 - 4x + 4}{8} - x^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{(x-2)^2}{8} dx = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}(-2)^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



**参考**  $\int (x+p)^2 dx = \frac{1}{3}(x+p)^3 + C$  (C は積分定数)

**39** [2004 センター]

**解説**

(1) 放物線  $y = mx(x+c^2-1)$  と直線  $y = -x+1$  が接するから、方程式  $mx(x+c^2-1) = -x+1$  は重解をもつ。

整理すると  $mx^2 + \{m(c^2-1)+1\}x - 1 = 0$

この方程式の判別式を D とすると  $D = \{m(c^2-1)+1\}^2 - 4m \cdot (-1) = 0$

m はこの 2 次方程式を満たす。

整理すると  $(c^2-1)^2 m^2 + 2(c^2+1)m + 1 = 0$

よって  $(c+1)^2(c-1)^2 m^2 + 2(c^2+1)m + 1 = 0$

ゆえに  $\{(c+1)^2 m + 1\} \{(c-1)^2 m + 1\} = 0$  よって  $m = \frac{-1}{(c+1)^2}, \frac{-1}{(c-1)^2}$

したがって、求める放物線は

$$C_1: y = \frac{-1}{c^2 + 2c + 1} x(x+c^2-1), \quad C_2: y = \frac{-1}{c^2 - 2c + 1} x(x+c^2-1)$$

$C_1: y = \frac{-1}{c^2 + 2c + 1} \{x^2 + (c^2-1)x\}$  であるから  $y' = \frac{-1}{c^2 + 2c + 1} (2x + c^2 - 1)$

接線の傾きが -1 となるような x の値が接点の x 座標である。

$$\frac{-1}{c^2 + 2c + 1} (2x + c^2 - 1) = -1 \quad \text{とすると} \quad x = 1 + c$$

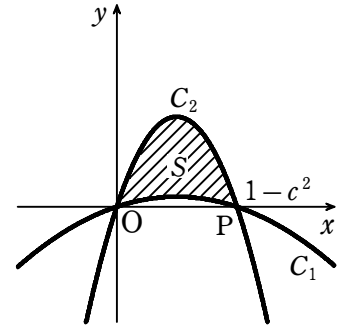
(2)  $C_1, C_2$  の  $x^2$  の係数  $\frac{-1}{(c+1)^2}, \frac{-1}{(c-1)^2}$  について

$$\frac{-1}{(c-1)^2} - \frac{-1}{(c+1)^2} = \frac{-4c}{(c+1)^2(c-1)^2} < 0$$

よって  $\frac{-1}{(c-1)^2} < \frac{-1}{(c+1)^2} < 0$

ゆえに、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1-c^2} \left\{ \frac{-1}{(c-1)^2} x(x+c^2-1) - \frac{-1}{(c+1)^2} x(x+c^2-1) \right\} dx \\ &= \frac{-4c}{(c+1)^2(c-1)^2} \int_0^{1-c^2} x(x+c^2-1) dx \\ &= \frac{-4c}{(c+1)^2(c-1)^2} \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(1-c^2-0)^3 \right\} \\ &= \frac{2c}{3(c+1)^2(c-1)^2} (1+c)^3(1-c)^3 \\ &= \frac{2}{3} c(1+c)(1-c) = \frac{2}{3} c(1-c^2) \end{aligned}$$



また  $S' = \frac{2}{3}(1-3c^2)$

$0 < c < 1$  において、 $S' = 0$  とすると  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって、 $0 < c < 1$  における  $S$  の増減表は右のようになる。

$c$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$S'$		+	0	-	
$S$		↗	$\frac{4\sqrt{3}}{27}$	↘	

$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき、点  $P$  の  $x$  座標は

$$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

したがって、 $S$  は  $P$  の  $x$  座標が  $\frac{2}{3}$  のとき最大値

$\frac{4\sqrt{3}}{27}$  をとる。

40 [2004センター]

解説

(1)  $C: y = -x^2 + a^2$ ,  $l: y = x + a$  が接するときの  $a$  の値を  $a_0$  とすると、方程式  $-x^2 + a_0^2 = x + a_0$  が重解をもつ。

整理すると  $x^2 + x - a_0^2 + a_0 = 0$

この判別式  $D$  について  $D = 0$  であるから  $D = 1^2 - 4(-a_0^2 + a_0) = 0$

すなわち  $4a_0^2 - 4a_0 + 1 = 0$  よって  $(2a_0 - 1)^2 = 0$

ゆえに  $a_0 = \frac{1}{2}$  これは  $0 < a_0 < 1$  を満たす。

$a \neq \frac{1}{2}$  のとき、方程式  $-x^2 + a^2 = x + a$  を整理すると  $x^2 + x - a(a-1) = 0$

よって  $(x+a)(x-(a-1)) = 0$  ゆえに  $x = -a, a-1$

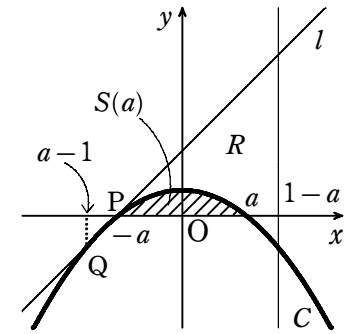
このとき  $y = 0, 2a-1$

よって、交点は  $P(-a, 0), Q(a-1, 2a-1)$

(2)  $0 < a < \frac{1}{2}$  のとき、 $a-1 < -a, a < 1-a$  であるから

ら、 $S(a)$  は右の図の斜線部分の面積である。

$$\begin{aligned} \text{よって } S(a) &= \int_{-a}^a (-x^2 + a^2) dx \\ &= -\int_{-a}^a (x+a)(x-a) dx \\ &= -\left[ -\frac{\{a-(-a)\}^3}{6} \right] = \frac{4}{3} a^3 \end{aligned}$$

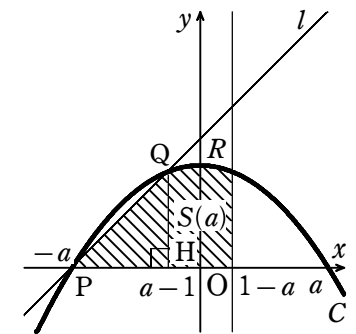


$\frac{1}{2} \leq a < 1$  のとき、 $-a \leq a-1, 1-a \leq a$  であるから、

$S(a)$  は右の図の斜線部分の面積である。

$C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の中で  $a-1 \leq x \leq 1-a$  を満たす部分は  $y$  軸に関して対称であるから、その面積  $T$

$$\begin{aligned} \text{は } T &= 2 \int_0^{1-a} (-x^2 + a^2) dx = 2 \left[ -\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_0^{1-a} \\ &= 2 \left\{ -\frac{(1-a)^3}{3} + a^2(1-a) \right\} \\ &= -\frac{4}{3} a^3 + 2a - \frac{2}{3} \end{aligned}$$



ここで、 $Q$  から  $x$  軸に垂線  $QH$  を下ろすと

$$\begin{aligned} S(a) &= T + \triangle QPH = -\frac{4}{3} a^3 + 2a - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \{a-1 - (-a)\}^2 \\ &= -\frac{4}{3} a^3 + 2a - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (4a^2 - 4a + 1) = -\frac{4}{3} a^3 + 2a^2 - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(3)  $a_0 < a_0 + h < 1$  で、 $a_0 = \frac{1}{2}$  であるから、求める平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{S\left(\frac{1}{2} + h\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + h - \frac{1}{2}} &= \frac{1}{h} \left\{ \left[ -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + h\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \frac{1}{6} \right] - \left[ -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left[ -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}h + \frac{3}{2}h^2 + h^3\right) + 2\left(\frac{1}{4} + h + h^2\right) \right] - \left( -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left( -\frac{4}{3} h^3 + h \right) = -\frac{4}{3} h^2 + 1 \end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S\left(\frac{1}{2} + h\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + h - \frac{1}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{4}{3} h^2 + 1 \right) = 1$

参考  $S(a) = -\frac{4}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{1}{6}$  のとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\frac{1}{2}+h) - S(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}+h - \frac{1}{2}} = S'(\frac{1}{2})$

$S'(a) = -4a^2 + 4a$  であるから  $S'(\frac{1}{2}) = 1$

41 [2004センター]

解説

(1)  $y' = 2x$  であるから、点  $P(a, a^2)$  における  $C$  の接線  $l$  の方程式は

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

すなわち  $l: y = 2ax - a^2$

$a \neq b$  であるから、直線  $PQ$  の傾きは  $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$

$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき、 $l$  と直線  $PQ$  が直交するから  $\left\{ 2 \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \cdot \left( b - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$

よって  $b = \sqrt{2}$

(2)  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$  のとき、 $P, Q$  の座標は  $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $Q(\sqrt{2}, 2)$

線分  $PQ$  の中点  $M$  の座標は  $\left( \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} \right)$

すなわち  $\left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{5}{4} \right)$

$C$  上の点  $R$  の座標を  $(c, c^2)$ , 点  $S$  の座標を  $(X, Y)$

とすると、 $M$  は線分  $RS$  の中点であるから

$$\frac{X+c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \dots\dots ①, \quad \frac{Y+c^2}{2} = \frac{5}{4} \dots\dots ②$$

① から  $c = -X + \frac{\sqrt{2}}{2}$

② に代入すると  $Y + \left( -X + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{5}{2}$

整理すると  $Y = -X^2 + \sqrt{2}X + 2$

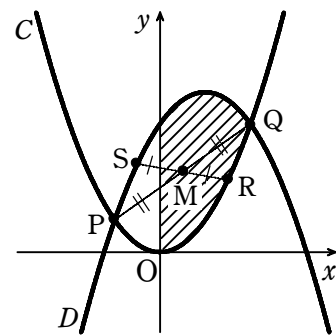
よって  $D: y = -x^2 + \sqrt{2}x + 2$

$R=P$  のとき  $S=Q$ ,  $R=Q$  のとき  $S=P$  となるから、 $P, Q$  は  $D$  上の点でもある。

よって、 $C$  と  $D$  の交点は 2 点  $P, Q$  である。

そのうち、 $x$  座標が正となるのは  $Q(\sqrt{2}, 2)$

求める面積は、図の斜線部分の面積であるから



$$\int_0^{\sqrt{2}} \{(-x^2 + \sqrt{2}x + 2) - x^2\} dx = \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2 + \sqrt{2}x + 2) dx$$

$$= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 2x \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$