$\boxed{1}$ [2003センター]

関数 $f(x)$ は $x \leqq 3$ のとき　$f(x)=x$

$x>3$ のとき　$f(x)=-3x+12$

で与えられている．このとき，$x \geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ と定める．

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$g(x)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x^{\boxed{ウ}}$ であり，

$x \geqq 3$ のとき，$g(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\boxed{エオ}x-\boxed{カキ}$ である．

(2)　曲線 $y=g(x)$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ g(a))$ (ただし，$0<a<3$) における C の接線 l の傾きは $\boxed{ク}$ であるから，l の方程式は $y=\boxed{ク}x-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}a^2$ である．

(3)　l と x 軸の交点を Q とすると Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}a,\ 0\right)$ であり，l と C の P 以外の交点を R とすると R の座標は $\left(\boxed{ス}-a,\ \boxed{セ}a-\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}a^2\right)$ である．

(4)　R から x 軸に垂線を引き，x 軸と交わる点を H とするとき，三角形 QRH の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}a^3-\boxed{テ}a^2+\boxed{トナ}a$ である．S は $a=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ のとき最大値をとる．

$\boxed{2}$ [2003センター]

放物線 $y=4x^2$ を C_1 とし，放物線 $y=x^2-6x+9$ を C_2 とする．

(1)　C_2 は x 軸と点 $\left(\boxed{ア},\ 0\right)$ で接する．

また，C_1 と C_2 の交点の x 座標は $x=\boxed{イウ}$，$\boxed{エ}$ である．

C_1 の $x=0$ から $x=\boxed{エ}$ までの部分，C_2 の $x=\boxed{エ}$ から $x=\boxed{ア}$ までの部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S は $S=\boxed{オ}$ である．

(2)　C_1 上の点 P および C_2 上の点 Q の x 座標をそれぞれ a，b とする．ただし，$a>0$ とする．P における C_1 の接線と Q における C_2 の接線が平行であるとき

$b=\boxed{カ}a+\boxed{キ}$ が成り立つ．

このとき，2 点 P，Q を通る直線 l の方程式は a を用いて

$y=\dfrac{\boxed{ク}a^2}{a+\boxed{ケ}}\left(x+\boxed{コ}\right)$ と表される．

l は a によらず定点 $\mathrm{R}\left(\boxed{サシ},\ \boxed{ス}\right)$ を通る．また，線分 RP と RQ の長さの比は $\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}=1:\boxed{セ}$ となり，つねに一定である．

$\boxed{3}$［2003センター］

O を原点とする座標平面において，放物線 $y=2x-x^2$ を C とし，C の軸を l とする．C 上で x 座標が a である点を P，$2a$ である点を Q とする．ただし，$a>0$ とし，P は l 上にないとする．また，l に関して P と対称な点を R とする．

(1)　R の x 座標は $\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}$ であり，R と Q が一致するような a の値は

$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．以下，$0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ とする．

(2)　四角形 OPQR の面積 S を a を用いて表すと，$S=\boxed{\text{オ}}\left(a^3-\boxed{\text{カ}}a^2+a\right)$

である．S は $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき最大値をとる．

(3)　線分 QR の中点 M の座標は $\left(\boxed{\text{ケ}}+\dfrac{a}{\boxed{\text{コ}}},\ \boxed{\text{サ}}a-\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}a^2\right)$ であり，a が $0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ の範囲を動くとき，M の軌跡は方程式

$y=-10x^2+\boxed{\text{セソ}}x-\boxed{\text{タチ}}$ で表される放物線 D の $1<x<\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ の部分である．

放物線 D の $1\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ の部分と C，l で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．

$\boxed{4}$［2003センター］

3 次関数 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ は，$x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値をとるとする．

(1)　a，b，c と $f(x)$ の極小値を求めよう．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $f'(x)=\boxed{\text{ア}}(x-1)(x-2)$ と因数分解されることより，

$a=\boxed{\text{イウ}}$，$b=\boxed{\text{エオ}}$ であることがわかる．さらに，$f(1)=6$ より

$c=\boxed{\text{カ}}$ である．

したがって，$f(x)$ の極小値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(2)　曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 5 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を $y=g(x)$ とする．このとき，$g(x)=2x^3-\boxed{\text{クケ}}x^2+\boxed{\text{コサ}}x-17$ である．

また，$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくとき，$h(x)=\boxed{\text{シス}}\left(x-\boxed{\text{セ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ソ}}\right)$ と因数分解できるから，$h(x)\geqq 0$ となるような x の値の範囲は

$\boxed{\text{タ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{チ}}$ である．$\left(\boxed{\text{セ}}\text{ と }\boxed{\text{ソ}}\text{ は解答の順序を問わない．}\right)$

(3)　二つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積は，放物線 $y=h(x)$ と x 軸によって囲まれた図形の面積に等しく，$\boxed{\text{ツ}}$ である．

$\boxed{5}$〔2002センター〕

座標平面において，点 $(a,\ 1)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_1 とする．また，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C_2 とし，C_2 上に点 $\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$ をとる．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1)　C_1 の方程式は $\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　P における C_2 の接線 l の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である．

したがって，l の方程式は $y=\boxed{\text{エ}}x-\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}b^{\boxed{\text{キ}}}$ である．

また，P を通り，l に直交する直線 m の方程式は

$y=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b^{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セ}}$ である．

(3)　C_1 の中心が m 上にあるとする．

このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}b^{\boxed{\text{チ}}}$ が成り立つ．

さらに，C_1 が P を通るとき $b=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$，　$a=\dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$ である．

このとき，C_1 は P において l に接し，l と x 軸のなす角は $\boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である．また，2 直線 $x=0$，$x=a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ハ}}}$ である．

$\boxed{6}$〔2002センター〕

座標平面において，点 $\mathrm{A}\ (a,\ a)$ (ただし，$a>0$) をとり，y 軸について A と対称な点 $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ を B とする．

(1)　放物線 $y=x^2+bx+c$ が 2 点 A，B を通るとき

$b=\boxed{\text{エ}}$，$c=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}^{\boxed{\text{キ}}}$ である．

この放物線と線分 AB で囲まれた部分の面積を S_1 とすると $S_1=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a^{\boxed{\text{コ}}}$ である．

(2)　次に，不等式 $0\leqq y\leqq -|x|+a$ の表す領域の面積を S_2 とすると $S_2=a^{\boxed{\text{サ}}}$ である．

$S_1=S_2$ となるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときである．

(3)　$0<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときは $S_{\boxed{\text{セ}}}\geqq S_{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，a をこの範囲で動かすとき，

二つの面積の差 $S_{\boxed{\text{セ}}}-S_{\boxed{\text{ソ}}}$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ において最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ をとる．

$\boxed{7}$［2002センター］

座標平面上において，$2\log_7 x - \log_7 y - 3 = 0$ により表される図形を C とし

$\log_7 x - \log_7 y - a = 0$ により表される図形を L とする．

(1)　C は曲線 $y = 7^{\boxed{アイ}} x^{\boxed{ウ}}$ の $x > 0$ の部分であり，

L は直線 $y = 7^{\boxed{エオ}} x$ の $x > 0$ の部分である．

(2)　C と L の交点は $\left(7^{\boxed{カ} - \boxed{キ}},\ 7^{\boxed{ク} - \boxed{ケコ}}\right)$ である．

(3)　$7^{\boxed{カ} - \boxed{キ}} \leqq x$ の範囲において，C と L，および直線 $x = \dfrac{3}{2} \cdot 7^{\boxed{カ} - \boxed{キ}}$

によって囲まれた部分の面積を $T(a)$ とすると $T(a) = \dfrac{7^{\boxed{サ} - \boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$ である．

(4)　$\log_7 T(a) \leqq 0$ となる最小の整数 a は $\boxed{ソ}$ である．

$\boxed{8}$［2002センター］

O を原点とする座標平面において，2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ をとる．次の二つの曲線 C_1，C_2 を考える．

$$C_1 : y = mx^2 + nx \qquad C_2 : y = px^3 + qx^2 + rx$$

ここで C_1 は 2 点 O，A を通り，C_1 の O における接線の傾きは 1 である．

また，C_2 は 3 点 O，A，B を通り，C_2 の O における接線の傾きは a $(a > 0)$ である．

(1)　このとき $m = \boxed{アイ}$，$n = \boxed{ウ}$ であり

$p = \boxed{エオ}$，$q = \boxed{カ}$，$r = \boxed{キ}$ である．

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は $x = 0$，$\boxed{ク}$，$\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} - \boxed{サ}$ である．

したがって，C_1 と C_2 が $0 < x < 1$ において交わるような a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}} < a < \boxed{セ}$ である．

(3)　a は $0 < a < 1$ を満たすとする．

C_1 の A における接線を l_1 とすると，l_1 の方程式は $y = \boxed{ソ} x + \boxed{タ}$ である．

C_2 の O における接線を l_2 とする．

x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}\left(\boxed{テ} + 1\right)}$ である．

また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である．

l_2 と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とし，また，l_1，l_2 および C_1 の三つで囲まれた部分の面積を S_2 とする．

$S_1 = S_2$ となるのは $a = \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ のときである．

$\boxed{9}$［2002センター］

放物線 $y=3x^2$ を C とし，C 上に 2 点 P$(a,\ 3a^2)$，Q$(-a^3,\ 3a^6)$ をとる．
ただし，$a>0$ とする．

(1)　P における C の接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}ax-\boxed{\text{イ}}a^{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，Q における C の接線 m の方程式は $y=\boxed{\text{エオ}}a^{\boxed{\text{カ}}}x-\boxed{\text{キ}}a^{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(2)　l と m の交点の x 座標 X は $X=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\left(a-a^{\boxed{\text{サ}}}\right)$ であり，X は

$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ をとる．

(3)　$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき，m，C および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である．

$\boxed{10}$［2001センター］

座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とする．第 1 象限の点 P$(a,\ a^2)$ における C の接線 l と y 軸との交点 Q の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{ア}}a^{\boxed{\text{イ}}}\right)$ である．l と y 軸のなす角が 30° となるのは $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときである．このとき線分 PQ の長さは $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であり，Q を中心とし線分 PQ を半径とする円と放物線 C とで囲まれてできる二つの図形のうち小さい方の面積は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

センター過去問⑧（微分法•積分法）　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{11}$ [2001センター]

関数 $y=3\sin\theta-2\sin^3\theta$ $\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 210^\circ)$ の最大値と最小値を求めたい．

そのため $\sin\theta=x$ とおくと，y は $y=3x-2x^3$ と表される．x の動く範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\leqq x\leqq\boxed{\text{エ}}$ であるから，y は $x=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$

をとり，$x=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる．

θ の関数としては，y は

$\theta=\boxed{\text{スセ}}^\circ$ および $\theta=\boxed{\text{ソタチ}}^\circ$ のとき最大

$\theta=\boxed{\text{ツテト}}^\circ$ のとき最小

である．

$\boxed{12}$ [2001センター]

座標平面において放物線 $y=x^2+x$ の $x\geqq 0$ の部分を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2+a)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ をとる．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

C と x 軸と直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a^{\boxed{\text{ウ}}}+\frac{1}{2}a^{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，線分 PQ と y 軸と C で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^{\boxed{\text{キ}}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}ab$$

である．したがって，$S_1=S_2$ となるのは

$$b=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}a^{\boxed{\text{シ}}}+a$$

のときである．このとき，線分 PQ の中点 R の座標は

$$\left(\frac{a}{\boxed{\text{ス}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^{\boxed{\text{タ}}}+a\right)$$

である．

$S_1=S_2$ の条件のもとで 2 点 P，Q を動かしたときの点 R の軌跡は，曲線

$$y=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x^{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\,x$$

の第 1 象限の部分である．

$\boxed{13}$［2001センター］

座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とし，直線 $y=ax$ を l とする．ただし，$0<a<1$ とする．C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とし，次に C と l と直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(1)　S_1 は

$$S_1=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表される．

(2)　二つの面積の和 $S=S_1+S_2$ は

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}a^{\boxed{\text{オ}}}-\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a+\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}$$

と表される．

(3)　S は $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる．

$\boxed{14}$［2001センター］

曲線 $y=2x^3-3x$ を C とする．

(1)　C 上の点 $(a,\ 2a^3-3a)$ における C の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}a^{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}\right)x-\boxed{\text{エ}}a^{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

(2)　上で求めた接線が点 $(1,\ b)$ を通るのは

$$b=\boxed{\text{カキ}}a^{\boxed{\text{ク}}}+\boxed{\text{ケ}}a^{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}$$

が成り立つときである．

(3)　したがって，点 $(1,\ b)$ から C へ相異なる 3 本の接線が引けるのは

$$\boxed{\text{シス}}<b<\boxed{\text{セソ}}$$

のときである．

15 [2000センター]

a を0でない実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=3ax^2-(8a+6)x+4a+6$$

により定める．

(1)　b，u，v を実数，$b\neq 0$ として，$g(x)=3bx^2+ux+v$ とおく．$g(x)$ が $\int_{-1}^{0} g(x)dx=-6$ を満たし，座標平面において，$y=g(x)$ の表す放物線 C が点 $(-1,\ -9)$ を通るとする．このとき u と v は b を用いて

$$u=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}},\quad v=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}$$

と表される．さらに，放物線 $y=f(x)$ と放物線 C が，y 軸上で共有点をもち，その点における二つの放物線の接線が一致するならば

$$a=\boxed{\text{カキ}},\quad b=\boxed{\text{ク}}$$

となり，その接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ケコ}}x-\boxed{\text{サ}}$$

である．

(2)　a を，(1) の解のみに限定せずに，0でない実数とする．関数 $h(x)$ を

$$h(x)=\int_0^x f(t)dt$$

により定める．このとき $x=0$ および $x=2$ における $h(x)$ の値と微分係数は，それぞれ

$$h(0)=\boxed{\text{シ}},\qquad h(2)=\boxed{\text{ス}}$$

$$h'(0)=\boxed{\text{セ}}a+\boxed{\text{ソ}},\quad h'(2)=\boxed{\text{タチ}}$$

である．$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $h(x)$ が正の値も負の値も両方とるのは

$$a<\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

のときである．

16 [2000センター]

座標平面上で三つの曲線

C_1：$y=-x^2-4x$

C_2：$y=-x^2+2x$

C_3：$y=k(-x^2+ax+b)$

を考える．ただし，a，b，k は定数で，$k>0$ とする．

(1)　C_1 と C_2 の交点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である．

(2)　点 Q $(-4,\ 0)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エオ}}$$

であり，点 R $(2,\ 0)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{カキ}}x+\boxed{\text{ク}}$$

である．

(3)　C_3 が2点 Q，R を通るとする．このとき

$$a=\boxed{\text{ケコ}},\quad b=\boxed{\text{サ}}$$

である．さらに点 Q における C_1 の接線と C_3 の接線が一致するのは

$$k=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

のときである．このとき，第2象限において，曲線 C_1，C_3 および y 軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

17 [2000センター]

関数 $f(x)=-3x^2+12$ の不定積分 $g(x)$ は

$$g(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^{\boxed{\text{イ}}}+\boxed{\text{ウエ}}\,x+C$$

である．ただし，C は積分定数とする．

(1)　$y=g(x)$ は $x=\boxed{\text{オカ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{キクケ}}+C$ をとり，$x=\boxed{\text{コ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{サシ}}+C$ をとる．

(2)　$y=g(x)$ のグラフが異なる3点で x 軸と交わる C の範囲は

$$\boxed{\text{スセソ}}<C<\boxed{\text{タチ}}$$

である．

(3)　x の値が $\boxed{\text{オカ}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ まで変化するときの $g(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ツ}}$ である．直線 $y=\boxed{\text{ツ}}\,x+2$ が曲線 $y=g(x)$ の接線となるような C の値は

$$\boxed{\text{テ}}\pm\frac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$ である．

18 [1999センター]

放物線 $y=-x^2+2x$ を C_1 とし，C_1 上に点 P$(\,a,\ -a^2+2a\,)$ をとる．ただし，a は $0<a<2$ を満たす定数とする．

(1)　P における C_1 の接線 l_1 の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)x+a^{\boxed{\text{エ}}}$ である．原点 O における C_1 の接線を l_2 とすると，l_1 と l_2 との交点 Q の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$$ である．

(2)　直線 $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$l_2$ および C_1 で囲まれた図形の面積 S_1 は $S_1=\dfrac{a^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(3)　放物線 $y=px^2+qx+r$ を C_2 とする．C_2 が3点 O，P，Q を通るとき，

$p=\boxed{\text{サシ}}$，$q=a+\boxed{\text{ス}}$，$r=\boxed{\text{セ}}$ となる．

このとき C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S_2 は $S_2=\dfrac{a^{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

したがって $S_2=\boxed{\text{チ}}\,S_1$ が成り立つ．

$\boxed{19}$ [1999センター]

関数 $f(x)=x^2-4x-5$ に対して，$g(x)=3\int_1^x f(t)dt$ とおく．$y=g(x)$ の表す曲線を C とする．

(1) $g(x)=x^3-\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エオ}}$ である．

(2) 関数 $g(x)$ は $x=\boxed{\text{カキ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{クケ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{コ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{サシス}}$ をとる．

(3) 傾きが a である C の接線が1本だけ存在するのは，$a=\boxed{\text{セソタ}}$ のときである．このとき，接点の座標は $\left(\boxed{\text{チ}},\ \boxed{\text{ツテト}}\right)$ であり，接線の方程式は $y=\boxed{\text{ナニヌ}}x+\boxed{\text{ネノ}}$ である．

$\boxed{20}$ [1999センター]

座標平面において，放物線 $y=3x^2$ を C_1 とし，直線 $y=-2x+1$ を l とする．

(1) C_1 と l の交点の x 座標は $\boxed{\text{アイ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

(2) a，b は実数で，$a \geqq 0$ とし，放物線 $y=-x^2+ax+b$ を C_2 とする．C_1 と C_2 は点 P$(u,\ v)$ を通り，その点で同じ接線をもつとする．このとき u，v，b を a で表すと

$u=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a$，$v=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}a^2$，$b=-\dfrac{1}{\boxed{\text{コサ}}}a^{\boxed{\text{シ}}}$ である．

さらに，l が C_2 上のある点Qにおける接線ならば $a=\boxed{\text{ス}}$，$b=\boxed{\text{セ}}$ となり，その点Qの座標は $\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タチ}}\right)$ である．

(3) $a=\boxed{\text{ス}}$，$b=\boxed{\text{セ}}$ のとき，l，C_2 および直線 $x=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である．

$\boxed{21}$ [1998センター]

$a>0$ とし，直線 $y=2ax$ を l とする．

(1)　点 $(-1,0)$ で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする．その接点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}\right)$ であり，C_1 の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}(x+1)^2$ である．次に，x 軸に接する放物線 C_2：$y=p(x-q)^2$ が点 P を通り，点 P での接線が直線 l と直交しているとする．このとき，点 P での C_2 の接線の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，p と q は $p=\dfrac{1}{\boxed{\text{コサ}}\,a^{\boxed{\text{シ}}}}$，$q=\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(2)　放物線 C_1，x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，また放物線 C_2，x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1, S_2 は a を用いてそれぞれ $S_1=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}a$，$S_2=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}a^{\boxed{\text{ナ}}}$ と表される．

したがって，$3S_1=S_2$ となるのは，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときである．

$\boxed{22}$ [1998センター]

二つの 2 次関数 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-6x+12$ を考える．放物線 $y=g(x)$ の頂点は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，二つの放物線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ は点 $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ で交わる．放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{オ}}\,ax-a^2$ である．この直線 l がもう一方の放物線 $y=g(x)$ にも接するならば，$a=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．このとき，直線 l と放物線 $y=g(x)$ との接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，二つの放物線 $y=f(x)$, $y=g(x)$，およびこれらに接する直線 l で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる．

$\boxed{23}$ [1998センター]

p を正の数とし，関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-px^2+4$ を考える．$f(x)$ は $x=\boxed{\text{ア}}$ で極大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{ウ}}\,p$ で極小値 $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}p^3+\boxed{\text{キ}}$ をとる．$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{ウ}}\,p$ とおく．4点 A$(a, f(a))$, B$(a, f(b))$, C$(b, f(b))$, D$(b, f(a))$ を頂点とする四角形ABCDが正方形となるのは $p=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである．

$\boxed{24}$ [1998センター]

放物線 C : $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点Pの x 座標を $a\ (a>0)$ とする．Pにおける C の接線を l_1 とし，l_1 と直交する C の接線を l_2 とする．また，l_2 と C の接点をQとする．

(1)　Qの x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，l_2 の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}x-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}\,a^2}$ である．

(2)　ある数 $b\ (b<a)$ に対して，直線 $x=b$ と直線 l_1 と放物線 C で囲まれる部分の面積は $\displaystyle\int_b^a\left(\frac{1}{2}x^2-\boxed{\text{ケ}}\,x+\frac{1}{2}a^2\right)dx=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}(a-b)^{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(3)　2直線 l_1, l_2 と放物線 C で囲まれる部分の面積は

$$\frac{1}{\boxed{\text{シス}}}\left(\boxed{\text{セ}}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)^{\boxed{\text{チ}}}$$ である．

$\boxed{25}$［1998センター］

座標平面上で点 A$(0, 1)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+1$ が，直線 $y=2$ の $x>0$ の部分と点 C$(c, 2)$ で接している．

このとき，a, b を c を用いて表せば $a=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}^{\boxed{\text{エ}}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．この放物線と x 軸の正の部分との交点を B とすると，直線 ABは c を用いて

$y=\dfrac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}x+\boxed{\text{コ}}$ と表される．また，この放物線と直線 AB とで囲まれる部分の面積が 1 であるならば $c=\boxed{\text{サ}}\left(\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}\right)$ である．

$\boxed{26}$［1997センター］

a を実数とし，放物線 C：$y=x^2+2ax+3a^2+3a+12$ を考える．

(1)　a が動くとき，放物線 C の頂点の軌跡は放物線

$y=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウエ}}$ となる．

(2)　放物線 C がもう一つの放物線 $y=-x^2-10x$ と 2 点で交わる条件は

$-\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}<a<\boxed{\text{キ}}$ である．

この二つの放物線が 1 点を共有し，その点における接線が一致するとき，a の値は

$a=\boxed{\text{ク}}$ または $a=-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．$a=\boxed{\text{ク}}$ のとき，共通の接線の方程式は $y=-\boxed{\text{サ}}x+\boxed{\text{シ}}$ である．

(3)　$a=0$ のときの放物線 C：$y=x^2+12$ と放物線 $y=-x^2-10x$ の交点の x 座標は

$x=\boxed{\text{スセ}}$，$\boxed{\text{ソタ}}$ であり，この二つの放物線で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

$\boxed{27}$ [1997センター]

a が不等式 $0<a<\frac{1}{2}$ を満たすとき，放物線 $y=ax^2+2-12a$ …… ① を考える．

この放物線は a の値に関係なく定点 $\left(\pm\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ を通る．

放物線 ① と円 $x^2+y^2=16$ …… ② の交点の y 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

そして，$a=\frac{1}{4}$ のとき，放物線 ① と円 ② で囲まれる部分のうち放物線の上側にある部分の面積は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}+\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である．

$\boxed{28}$ [1997センター]

$f(x)=x^3-\frac{4}{3}x$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}^2-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)x-\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}^{\boxed{\text{キ}}}$$ である．

この接線が曲線上の他の点 B $(b,\ f(b))$ を通るならば $b=\boxed{\text{クケ}}a$ であり，点 B での接線に直交するならば $a^2=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である．

29 ［1997センター］

点 (1, 1) を通る傾き a の直線 l の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}$ である．

この直線 l と放物線 C : $y=x^2$ の交点の x 座標は 1 と $\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}$ が負であるとき，l と C で囲まれた図形の $x\leqq 0$ の部分の面積は

$$\frac{\left(\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\right)^{\boxed{\text{カ}}}\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)}{\boxed{\text{ケ}}}$$ である．

30 ［1997センター］

$a>0$ とし，二つの放物線 $y=\dfrac{a}{2}x^2$，$y=-\dfrac{a}{2}x^2+\dfrac{a}{1+a}$ を考える．

二つの放物線の交点の x 座標は $x=\pm\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}}$ であり，二つの放物線で

囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\times\dfrac{a}{\left(\sqrt{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\right)^{\boxed{\text{カ}}}}$ となる．

ここで，$t=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}}$ とおくと，$\boxed{\text{キ}}<t<\boxed{\text{ク}}$ であり，

$S=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\times\left(t-t^{\boxed{\text{ケ}}}\right)$ となる．$t=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}$ のとき，S は最大値をとる．

したがって，$a=\boxed{\text{サ}}$ のとき面積 S は最大となり，その値は

$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

31 ［2006センター］

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$$C_1 : y=x^2 \qquad C_2 : y=x^2-4ax+4a(a+1)$$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とする。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}tx-t^{\boxed{\text{イ}}}$ であり，この直線が C_2 に接するのは $t=\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}}$ であり，ℓ と C_2 の接点の座標は $\left(\boxed{\text{カキ}}+\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}}+\boxed{\text{サ}}\right)$ である。

(2)　C_1 と C_2 の交点を P とすると，P の座標は $\left(a+\boxed{\text{シ}},\ \left(a+\boxed{\text{シ}}\right)^2\right)$ である。

点 P を通って直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y=\boxed{\text{ス}}x+a^{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a>\boxed{\text{タ}}$ である。

$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}+1\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナニ}}-1\right)$$

と表される。

32 ［2006センター］

3 次関数 $y=x^3-3x^2$ のグラフを C とする。a を実数として，座標平面上に点 $\mathrm{P}(3,\ a)$ をとる。

(1)　点 $\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t^2)$ における C の接線が点 P を通るとき

$$\boxed{\text{アイ}}t^3+\boxed{\text{ウエ}}t^2-\boxed{\text{オカ}}t=a$$

が成り立つ。

$f(t)=\boxed{\text{アイ}}t^3+\boxed{\text{ウエ}}t^2-\boxed{\text{オカ}}t$ とおくと，関数 $f(t)$ は $t=\boxed{\text{キ}}$ で極小となり，$t=\boxed{\text{ク}}$ で極大となる。

したがって，点 P を通る C の接線の本数が 2 本となるのは $a=\boxed{\text{ケ}}$，$a=\boxed{\text{コサ}}$ のときであり，$a=\boxed{\text{ケ}}$ のときの 2 本の接線の傾きは $\boxed{\text{シ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，$\boxed{\text{シ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ は解答の順序を問わない。

(2)　点 P を通る C の接線の本数とその傾きの符号は

$a=2$ のとき $\boxed{\text{セ}}$，　$a=-2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$

$a=-6$ のとき $\boxed{\text{タ}}$

である。

$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つずつ選べ。

⓪　接線は 1 本で，傾きは正

①　接線は 1 本で，傾きは負

②　接線は 3 本で，傾きはすべて正

③　接線は 3 本で，傾きは 1 本が正，他の 2 本は負

④　接線は 3 本で，傾きは 2 本が正，他の 1 本は負

⑤　接線は 3 本で，傾きはすべて負

33 [2006センター]

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$$C_1: y=x^2 \qquad C_2: y=x^2-4ax+4a(a+1)$$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とする。

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}tx-t^{\boxed{\text{イ}}}$ であり，この直線が C_2 に接するのは $t=\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

したがって，直線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}}$ であり，ℓ と C_2 の接点の座標は $\left(\boxed{\text{カキ}}+\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}}+\boxed{\text{サ}}\right)$ である。

(2) C_1 と C_2 の交点を P とすると，P の座標は $\left(a+\boxed{\text{シ}},\ \left(a+\boxed{\text{シ}}\right)^2\right)$ である。

点 P を通って直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y=\boxed{\text{ス}}x+a^{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a>\boxed{\text{タ}}$ である。

$a>\boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\boxed{\text{テ}}+1\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナニ}}-1\right)$$

と表される。

34 [2005センター]

a を定数とし，放物線 $y=x^2+2ax-a^3-2a^2$ を C，その頂点を P とする。

(1) 頂点 P の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}}a^2\right)$ である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は $y=x^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}x^2$ のグラフ上にある。

(2) a が $-3\leqq a<1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大となるのは $a=\boxed{\text{キ}}$ と $a=\boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a=\boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3) a の値を (2) で求めた $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は

$$C_2: y=x^2-\boxed{\text{シ}}x+\boxed{\text{ス}},\quad C_3: y=x^2-\boxed{\text{セ}}x$$

である。このとき

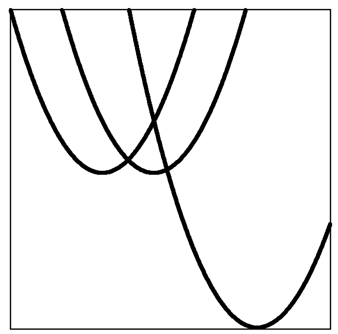
C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$，$C_1$ と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$ である。

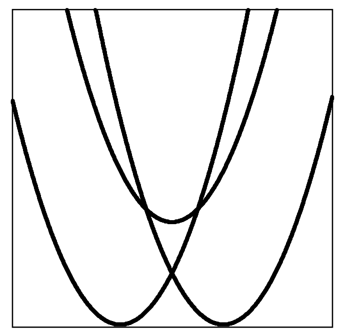
(4) C_1，C_2，C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図 ⓪ ～ ③ のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

三つの放物線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

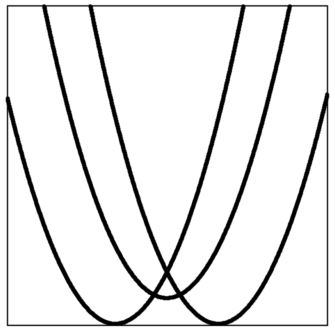
⓪



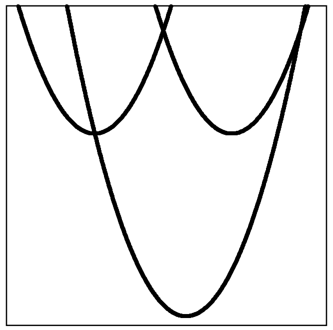
①



②



③



35 ［2005センター］

放物線 $y=x^2$ を C とし，放物線 $y=ax^2+bx+c$ $(a\fallingdotseq 0)$ を D とする。放物線 D は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通り，さらに，D の点 P における接線 m は C の点 P における接線 ℓ に直交しているとする。

(1)　接線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}$ である。

接線 ℓ と m は直交しているから，b は a を用いて

$$b=-\boxed{\text{ウ}}a-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\quad\cdots\cdots ①$$

と表される。さらに，放物線 D が点 P を通るから，c は a を用いて

$$c=\boxed{\text{カ}}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{2}\quad\cdots\cdots ②$$

と表される。①，② から，放物線 D の頂点 Q は a を用いて

$$\mathrm{Q}\left(1+\frac{1}{\boxed{\text{ク}}a},\ \boxed{\text{ケ}}-\frac{1}{\boxed{\text{コサ}}a}\right)$$

と表される。したがって，a の値が変化するとき，頂点 Q は直線

$$y=-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}x+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$ 上を動く。

(2)　点 Q が放物線 C 上の点となるのは，$a=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである。このとき，

放物線 C の $x\geqq 0$ の部分と放物線 D の $x\geqq 0$ の部分および y 軸によって囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{108}$ である。

36 [2005センター]

定数 a，b に対して，$f(x)=2x^3-ax^2+bx$ とおく。関数 $f(x)$ は条件

(★)　$0<x<1$ の範囲で極大値と極小値をもつ

を満たすとする。

(1)　このとき，定数 a，b が満たす条件を求めよう。

● 導関数 $f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イウ}}x+\boxed{\text{エ}}$ について，方程式 $f'(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に二つの異なる解をもつ。したがって，x が実数全体を動くときの導関数 $f'(x)$ の最小値 $\boxed{\text{オ}}-\dfrac{a^2}{\boxed{\text{カ}}}$ は負である。

● $f'(x)$ が最小値をとる x の値 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ は 0 と 1 の間にある。

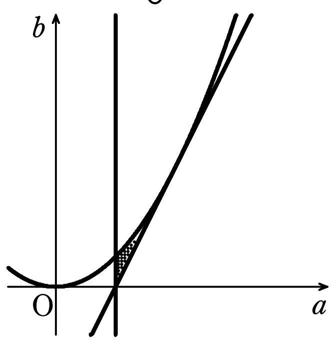
● $f'(0)$ と $f'(1)$ の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ から一つ選べ。

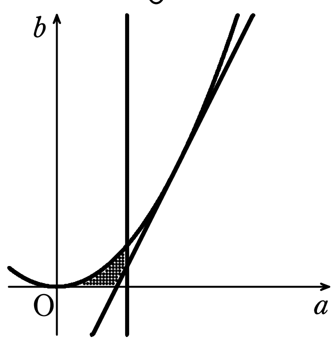
⓪　ともに正　　　　①　ともに負

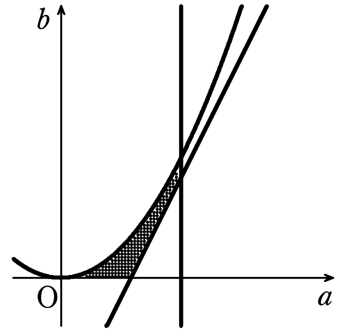
②　一方が正，もう一方が負　　　　③　ともに 0

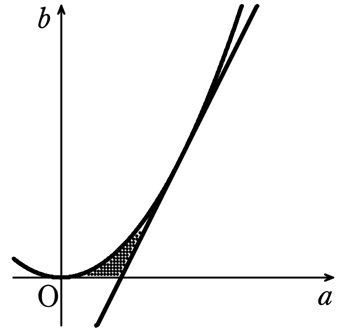
④　一方が 0，もう一方が正　　　　⑤　一方が 0，もう一方が負

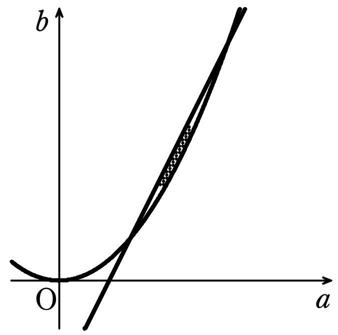
以上から，関数 $f(x)$ が条件 (★) を満たすような点 $(a,\ b)$ 全体を座標平面上に図示すると，図 $\boxed{\text{コ}}$ の影をつけた部分となり，その部分の面積は $\boxed{\text{サ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{コ}}$ については，当てはまるものを，次の図 ⓪ ～ ⑤ から一つ選べ。

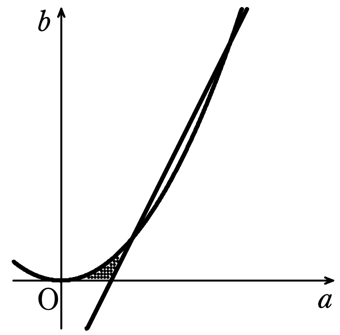
⓪


①


②


③


④


⑤


(2)　関数 $f(x)$ が条件 (★) を満たすような a，b で，ともに整数となるのは $a=\boxed{\text{シ}}$，$b=\boxed{\text{ス}}$ のみである。このとき，関数 $f(x)$ は

$x=\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ で極大となる。

$$f(x)=\left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}x-\frac{1}{6}\right)f'(x)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

と変形できるので，$f(x)$ の極大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

$\boxed{37}$ [2005センター]

点 $(0,\ a)$ を P とし，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，C 上の点 $\mathrm{Q}\,(t,\ t^2)$ をとる。

(1)　$a=15$ とし，t は $0<t<\sqrt{15}$ の範囲を動くとする。点 P，Q および点 $\mathrm{R}\,(0,\ t^2)$ を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよう。三角形 PQR の面積 $f(t)$ は

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(-t^{\boxed{\text{ア}}}+\boxed{\text{イウ}}\,t\right)$$ である。

関数 $f(t)$ の導関数は $f'(t)=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{2}\left(-t^{\boxed{\text{オ}}}+\boxed{\text{カ}}\right)$ であるから，三角形 PQR の面積は $t=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

(2)　点 $\mathrm{P}\,(0,\ a)$ を固定し，点 $\mathrm{Q}\,(t,\ t^2)$ が放物線 C 上を動くとき，P と Q の距離の 2 乗 PQ^2 の最小値 $g(a)$ を求めよう。$T=t^2$ とおくと

$$\mathrm{PQ}^2=T^2+\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サシ}}\right)T+\boxed{\text{ス}}^{\boxed{\text{セ}}}$$

と表される。

よって，この最小値 $g(a)$ は

$a\geqq\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき $\boxed{\text{チ}}-\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$,

$a<\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき $\boxed{\text{ト}}^{\boxed{\text{ナ}}}$

である。$g(a)$ を a の関数とみると $\displaystyle\int_0^1 g(a)\,da=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

$\boxed{38}$ [2004センター]

(1)　座標平面上の放物線 $y=x^2$ を C とする．a は $a\fallingdotseq 1$ を満たす実数とし，C 上に点 $\mathrm{P}\,(a+1,\ (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}\,(2a,\ 4a^2)$ をとる．

2 点 P，Q を通る直線を l とすると，l の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x-\boxed{\text{ウ}}\,a^2-\boxed{\text{エ}}\,a$$

である．

次に，b は $b\fallingdotseq 1$，$b\fallingdotseq a$ を満たす実数として，2 点 $\mathrm{R}\,(b+1,\ (b+1)^2)$，$\mathrm{S}\,(2b,\ 4b^2)$ を通る直線を m とする．直線 l，m の交点 T は

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \boxed{\text{キ}}\,ab+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である．よって，b を限りなく a に近づけるとき，点 T は限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{サ}}\,a^2+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく．

(2)　(1) で求めた点 U は，a の値によらない放物線

$$D:\ y=\frac{\boxed{\text{シ}}\,x^2-\boxed{\text{ス}}\,x+\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある．

さらに，点 U における放物線 D の接線の傾きは $\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}$ である．

放物線 D の接線で原点 O を通るものは $y=x$ と $y=\boxed{\text{ツテ}}\,x$ の二つである．

(3)　二つの放物線 C，D の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}}\right)$ である．

放物線 C，D および y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．

$\boxed{39}$ [2004センター]

$0<c<1$ を満たす c に対して，座標平面上の点 $(1-c^2,\ 0)$ を P とする．

(1)　原点 O と点 P を通る放物線 $y=mx(x+c^2-1)$ で，直線 $y=-x+1$ に接するものを求めよう．

この放物線が直線 $y=-x+1$ に接するから，m は 2 次方程式

$$\left(\boxed{\text{ア}}^2-\boxed{\text{イ}}\right)^2m^2+2\left(\boxed{\text{ウ}}^2+\boxed{\text{エ}}\right)m+1=0$$

を満たす．

よって求める放物線は $C_1:\ y=\dfrac{-1}{c^2+\boxed{\text{オ}}c+\boxed{\text{カ}}}x(x+c^2-1)$ と

$C_2:\ y=\dfrac{-1}{c^2-\boxed{\text{オ}}c+\boxed{\text{カ}}}x(x+c^2-1)$ の二つである．

放物線 C_1 と直線 $y=-x+1$ の接点の x 座標は $\boxed{\text{キ}}+c$ である．

(2)　(1) で求めた二つの放物線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積 S は

$S=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(c-\boxed{\text{コ}}^{\boxed{\text{サ}}}\right)$ である．面積 S は，P の x 座標が

$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとる．

$\boxed{40}$ [2004センター]

$0<a<1$ とし，直線 $l:\ y=x+a$ と直線 $x=1-a$ および x 軸によって囲まれた三角形を R とする．三角形 R の中で $y\leqq -x^2+a^2$ を満たす部分の面積を $S(a)$ で表す．

$y=-x^2+a^2$ で表される放物線を C とする．

(1)　放物線 C と直線 l が接するときの a の値を a_0 とすると，$a_0=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

$a\fallingdotseq a_0$ のとき，C と l の交点は

$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\right)$

である．

(2)　$0<a<a_0$ のとき，$S(a)=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}a^{\boxed{\text{ス}}}$ である．

$a_0\leqq a<1$ のとき，C と x 軸で囲まれた図形の中で $a-1\leqq x\leqq 1-a$ を満たす部分の

面積は $-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3+\boxed{\text{タ}}a-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であるから，

$S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}a^3+\boxed{\text{ナ}}a^2-\dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}}$ である．

(3)　h は $0<h<1-a_0$ を満たすとする．a の値が a_0 から a_0+h まで変化するときの関数 $S(a)$ の平均変化率は $-\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}h^2+\boxed{\text{ノ}}$ であり，h を限りなく 0 に近づけるとき，この式の値は限りなく $\boxed{\text{ハ}}$ に近づく．

$\boxed{41}$ [2004センター]

座標平面上の放物線 C : $y=x^2$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ と $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ をとる．

(1)　点 P における C の接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{アイ}}x-\boxed{\text{ウ}}^{\boxed{\text{エ}}}$ である．

$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，接線 l と直線 PQ が直交するならば，$b=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(2)　以下，$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ とする．

放物線 C 上に点 R をとる．線分 PQ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$ に関して，

点 R と対称な点を S とする．

点 R が放物線 C 上を動くとき，点 S は放物線

$$D : y=-x^2+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,x+\boxed{\text{サ}}$$

上を動く．

C と D の交点のうち，x 座標が正となる点の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ であり，

C と D の $0\leqq x\leqq\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ の部分と y 軸によって囲まれた部分の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．