センター過去問⑥（指数･対数関数）　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

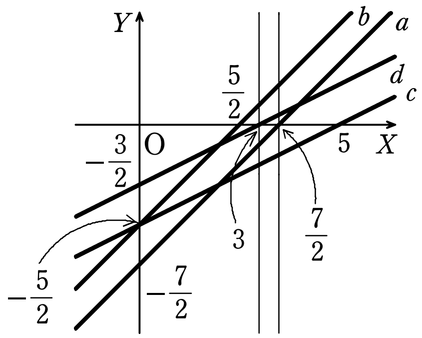
1 [2003センター]

(1)　$\log_9 x-\frac{3}{2}=0$　　よって　$x=9^{\frac{3}{2}}={}^{\text{アイ}}27$　　これは $x>0$ を満たす.

(2)　$\log_9 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3 x$ であるから，$X=\log_3 x$ とおくと

$$a=X-\frac{7}{2},\ b=X-\frac{5}{2},\ c=\frac{1}{2}X-\frac{5}{2},\ d=\frac{1}{2}X-\frac{3}{2}$$

ここで $Y=a$，$Y=b$，$Y=c$，$Y=d$ のグラフを XY 平面上にかくと右図のようになる.



a，b，c，d すべてが負になるのは，グラフから $X<\frac{5}{2}$ のときである.

よって　$\log_3 x<\frac{5}{2}$　ゆえに　$0<x<{}^{\text{ウ}}9\sqrt{{}^{\text{エ}}3}$

2つが正，2つが負になるのは，グラフから $3<X<\frac{7}{2}$ のときである.

よって　$3<\log_3 x<\frac{7}{2}$　　ゆえに　${}^{\text{オカ}}27<x<{}^{\text{キク}}27\sqrt{{}^{\text{ケ}}3}$

すべてが正になるのは，グラフから $5<X$ のときである.

よって　$\log_3 x>5$　　ゆえに　${}^{\text{コサシ}}243<x$

(3)　$27<x<27\sqrt{3}$ のとき，$3<X<\frac{7}{2}$ であるから，グラフより

$${}^{\text{ス}}c<{}^{\text{セ}}a<{}^{\text{ソ}}d<{}^{\text{タ}}b$$

2 [2003センター]

真数条件から　$x-1>0$，$4-x>0$，$a-x>0$

これらより　$1<x<4$　かつ　$x<{}^{\text{ア}}a$

また，① から　$\log_4(x-1)(4-x)=\log_4(a-x)$

よって　　$(x-1)(4-x)=a-x$

整理すると　　$-x^2+{}^{\text{イ}}6x-{}^{\text{ウ}}4=a$　…… ②

(1)　② から　$x^2-6x+4+a=0$　…… ②′

②′ の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(-3)^2-(4+a)=-a+5$

重解をもつのは，$D=0$ のときであるから　$a={}^{\text{エ}}5$

このとき，②′ は　$x^2-6x+9=0$

$$(x-3)^2=0$$

よって，② の重解は　$x={}^{\text{オ}}3$

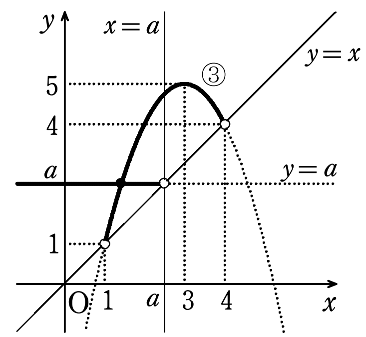
① がただ1つの解をもつには，放物線 $y=-x^2+6x-4$　…… ③ と直線 $y=a$ が $1<x<4$　かつ　$x<a$ の範囲で共有点をただ1つもてばよい.

③ は $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$

共有点の個数は，放物線 ③ $(1<x<4)$ と，直線 $y=a$ $(x<a)$ の共有点の個数に等しい.

直線 $y=a$ $(x<a)$ のグラフは，右図のように，領域 $y>x$ 内に存在する.　…… (A)

また，右図より，放物線 ③ $(1<x<4)$ は，放物線 ③ の，領域 $y>x$ 内の部分である.　…… (B)



(A)，(B) と図から，① がただ1つの解をもつとき

$a=5$　または　${}^{\text{カ}}1<a\leqq{}^{\text{キ}}4$

(2)　$a=4$ のとき，②′ から　$x^2-6x+8=0$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$1<x<4$　かつ　$x<a\,(=4)$　であるから，① の解は　$x={}^{\text{ク}}2$

このとき，① の右辺は　$\log_4(4-2)=\frac{1}{{}^{\text{ケ}}2}$

$\boxed{3}$〔2002センター〕

$\log_2(x+a)=\log_2\{x-(-a)\}$ と変形できる．

よって，$^{\text{アイ}}-a$ だけ平行移動したものである．

(1)　$F(2)=1$ から　$g(2)-f(2)=1$　　すなわち　$\log_2(2+a)-\log_2 2=1$

ゆえに　$a={}^{\text{ウ}}2$

$F(1)=2F(3)$ から　$g(1)-f(1)=2\{g(3)-f(3)\}$

すなわち　$\log_2(1+a)-0=2\{\log_2(3+a)-\log_2 3\}$

よって　$(1+a)\times 9=(3+a)^2$

これを解くと　$a=0,\ 3$

条件より，$a>0$ であるから　$a={}^{\text{エ}}3$

(2)　$g(1)=h(1)$ から　$\log_2(1+a)=\log_4(4+b)$

ゆえに　$b=(1+a)^2-4$　……①

$g\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)$ から　$\log_2\left(\frac{1}{2}+a\right)=\log_4(2+b)$

ゆえに　$b=\left(\frac{1}{2}+a\right)^2-2$　……②

①，② を解くと　$a=\frac{{}^{\text{オ}}5}{{}^{\text{カ}}4}$，　$b=\frac{{}^{\text{キク}}17}{{}^{\text{ケコ}}16}$

$\boxed{4}$〔2002センター〕

$2\log_7 x-\log_7 y-3=0$　……①

$\log_7 x-\log_7 y-a=0$　……②

(1)　① において，真数は正であるから　$x>0,\ y>0$

① を変形すると　$\log_7 x^2-\log_7 7^3=\log_7 y$　　よって　$y=7^{\text{アイ}-3}x^{\text{ウ}2}$　$(x>0)$

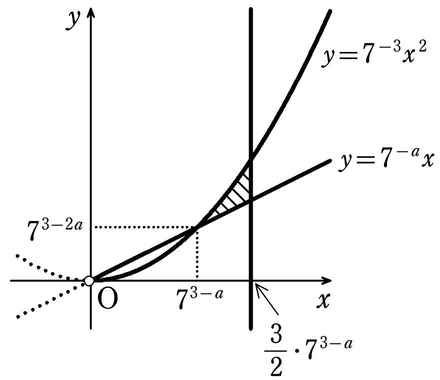
② において，真数は正であるから　$x>0,\ y>0$

② を変形すると　$\log_7 x-\log_7 7^a=\log_7 y$　　よって　$y=7^{\text{エオ}-a}x$　$(x>0)$

(2)　$7^{-3}x^2=7^{-a}x$，$x>0$ から　$x=7^{3-a}$　　よって　$y=7^{-a}\times 7^{3-a}=7^{3-2a}$

ゆえに，交点は　$\left(7^{\text{カ}3-\text{キ}a},\ 7^{\text{ク}3-\text{ケコ}2a}\right)$

(3)　$T(a)=\int_{7^{3-a}}^{\frac{3}{2}\cdot 7^{3-a}}(7^{-3}x^2-7^{-a}x)dx$



$$=\left[7^{-3}\cdot\frac{x^3}{3}-7^{-a}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{7^{3-a}}^{\frac{3}{2}\cdot 7^{3-a}}$$

$$=\frac{7^{-3}}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\cdot 7^{3-a}\right)^3-(7^{3-a})^3\right\}$$

$$-\frac{7^{-a}}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\cdot 7^{3-a}\right)^2-(7^{3-a})^2\right\}$$

$$=\frac{19}{24}\cdot 7^{6-3a}-\frac{5}{8}\cdot 7^{6-3a}=\frac{7^{\text{サ}6-\text{シス}3a}}{{}^{\text{セ}}6}$$

(4)　$\log_7 T(a)=6-3a-\log_7 6$

よって　$6-3a-\log_7 6\leqq 0$　　ゆえに　$a\geqq 2-\frac{1}{3}\log_7 6$

$0<\log_7 6<1$ であるから　$-\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}\log_7 6<0$

よって，最小の整数 a は $^{\text{ソ}}2$ である．

5 [2001センター]

$\dfrac{4}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{2^x}=1$ から　$\dfrac{4}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{(\sqrt{2})^{2x}}=1$

よって，$X=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}$ とおくと，X の方程式　$4X+5X^2=1$

すなわち ${}^{ア}5X^2+{}^{イ}4X-1=0$　が得られる．

ゆえに　$(5X-1)(X+1)=0$

一方，① において $\dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}>0$ であるから　$X>{}^{ウ}0$　　したがって　$X=\dfrac{{}^{エ}1}{{}^{オ}5}$

よって　$\dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}=\dfrac{1}{5}$　　ゆえに　$(\sqrt{2})^x=5$ から　$2^{\frac{x}{2}}=5$

よって　$\dfrac{x}{2}=\log_2 5$　　したがって　$x={}^{カ}2\log_2{}^{キ}5$

6 [2001センター]

$0=\log_5 1$，$1=\log_5 5$

よって　1，5，$2^{1.5}$，$3^{1.5}$，$0.5^{1.5}$ の大小を調べる．

これらの数は正であるから，平方しても大小関係は変わらない．

$1^2=1$，$5^2=25$，$(2^{1.5})^2=2^3=8$，$(3^{1.5})^2=3^3=27$，$(0.5^{1.5})^2=0.5^3=0.125$

$0.125<1<8<25<27$ であるから　$0.5^{1.5}<1<2^{1.5}<5<3^{1.5}$

5 を底とする対数をとっても大小関係は変わらないから

${}^{ア}c<0<{}^{イ}a<{}^{ウ}1<{}^{エ}b$

7 [2001センター]

$6^x-\dfrac{2^x}{27}-27\cdot3^x+1=0$ …… ① とおく.

$X=2^x$, $Y=3^x$ とおくと，① は　$XY-\dfrac{1}{27}X-27Y+1=0$

よって　$(X-{}^{アイ}27)\left(Y-\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エオ}27}\right)=0$

ゆえに　$X=27$, $Y=\dfrac{1}{27}$ であるから　$2^x=27$, $3^x=\dfrac{1}{27}$

これを解くと　$x=\log_2 27$, -3

よって，小さい方の解は　${}^{カキ}-3$

また，$2^4<27<2^5$ であるから　$4<\log_2 27<5$

したがって，大きい方の解の整数部分は　${}^{ク}4$

8 [2000センター]

(1)　$f(x-1)=3^{x-1}+3^{-(x-1)}=3^{x-1}+3^{-x+1}=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}3}\cdot3^x+{}^{ウ}3\cdot3^{-x}$

$f(x-1)=f(x)$ とすると　$\dfrac{1}{3}\cdot3^x+3\cdot3^{-x}=3^x+3^{-x}$

よって　$2\cdot3^{-x}=\dfrac{2}{3}\cdot3^x$　　ゆえに　$3^{-x}=3^{x-1}$

よって　$-x=x-1$

したがって　$x=\dfrac{{}^{エ}1}{{}^{オ}2}$

また　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{{}^{カ}4\sqrt{{}^{キ}3}}{{}^{ク}3}$

(2)　$\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=\log_2\dfrac{x+6}{2}=\log_2(x+6)-1$

よって，① のグラフは，② のグラフを

x 軸方向に ${}^{ケコ}-6$, y 軸方向に ${}^{サシ}-1$

だけ平行移動したものである.

① と ② のグラフの共有点の x 座標は，方程式

$\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=\log_2 x$ …… ③

の解である.

③ において，真数は正であるから　$\dfrac{x}{2}+3>0$, $x>0$

よって　$x>0$ …… ④

また，③ から　$\dfrac{x}{2}+3=x$

これを解いて　$x=6$　(これは ④ を満たす)

共有点の y 座標は　$y=\log_2 6=\log_2(2\times3)=1+\log_2 3$

ゆえに，求める共有点の座標は　$({}^{ス}6,\ 1+\log_2{}^{セ}3)$

9 〔2000センター〕

$\log_3(x+3^t)=2t-2$ …… ①

(1)　① から　$x+3^t=3^{2t-2}$

よって　$x=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}9}\cdot 3^{{}^{ウ}2t}-{}^{エ}3^t$ …… ②

(2)　$t=0$ のとき，② から　$x=\frac{1}{9}\cdot 3^0-3^0=\frac{1}{9}-1=\frac{{}^{オカ}-8}{{}^{キ}9}$

(3)　$x=2\cdot 3^t$ のとき，② から　$2\cdot 3^t=\frac{1}{9}\cdot 3^{2t}-3^t$

よって　$3^{2t}-27\cdot 3^t=0$　　ゆえに　$3^t(3^t-27)=0$

$3^t>0$ であるから　$3^t=27$

したがって　$t={}^{ク}3$

別解　$x=2\cdot 3^t$ のとき，① から　$\log_3(2\cdot 3^t+3^t)=2t-2$

よって　$\log_3 3^{t+1}=2t-2$　　ゆえに　$t+1=2t-2$

したがって　$t={}^{ク}3$

(4)　$x=-\frac{9}{4}$ のとき，② から　$-\frac{9}{4}=\frac{1}{9}\cdot 3^{2t}-3^t$

よって　$4\cdot 3^{2t}-36\cdot 3^t+81=0$

ゆえに　$(2\cdot 3^t-9)^2=0$　　よって　$3^t=\frac{9}{2}$

したがって　$t=\log_3\frac{9}{2}=\log_3 9-\log_3 2=2-\log_3{}^{ケ}2$

10 〔1999センター〕

$y^2-z^2=(y+z)(y-z)=2\cdot 5\cdot 3^x\times 2\cdot 2\cdot 3^{-x}={}^{アイ}40$

$z=0$ のとき　$5\cdot 3^x=2\cdot 3^{-x}$　　ゆえに　$(3^x)^2=\frac{2}{5}$　　よって　$3^x=\sqrt{\frac{{}^{ウ}2}{{}^{エ}5}}$

$y^2=z^2+40\geqq 40$，$y>0$ から　$y\geqq{}^{ケ}2\sqrt{{}^{コサ}10}$

等号成立は　$z=0$　　すなわち　$x=\frac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}(\log_3{}^{キ}2-\log_3{}^{ク}5)$ のとき．

11 [1999センター]

$y=\log_2\left(\frac{2}{3}x-a\right)$ から　$2^y=\frac{2}{3}x-a$

よって　$2^m=\frac{8}{3}-a$，$2^n=\frac{26}{3}-a$　　ゆえに　$2^n-2^m={}^{\text{ア}}6$

更に，m，n がともに正の整数のとき　$2^m(2^{n-m}-1)=6=2\cdot 3$ から

$m={}^{\text{イ}}1$，$n={}^{\text{ウ}}3$ となり，$a=\frac{8}{3}-2=\frac{{}^{\text{エ}}2}{{}^{\text{オ}}3}$

12 [1998センター]

$t=2^x$ とおくと，① は $\frac{5}{t}+8t=2a$ となる.

よって　$t^2-\frac{a}{{}^{\text{ア}}4}t+\frac{{}^{\text{イ}}5}{8}=0$ …… ② となり，更に $\left(t-\frac{a}{8}\right)^2+\frac{5}{8}-\frac{a^2}{64}=0$

すなわち　$\left(t-\frac{a}{{}^{\text{ウ}}8}\right)^2+\frac{{}^{\text{エオ}}40-a^2}{{}^{\text{カキ}}64}=0$ と変形される.

したがって，$\frac{40-a^2}{64}<0$ すなわち $a>{}^{\text{ク}}2\sqrt{{}^{\text{ケコ}}10}$ のとき ② は 2 個の解をもつ.

$a=2\sqrt{10}$ のとき，② は重解 $t=\frac{a}{8}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ をもつ.

よって　$2^x=\frac{\sqrt{10}}{4}$ から　$x=\frac{1}{{}^{\text{サ}}2}(\log_2{}^{\text{シ}}5-{}^{\text{ス}}3)$

13 [1998センター]

(1)　$y=9^b$ であるから　$\log_3 y=\log_3 9^b=b\log_3 9={}^{ア}2b$

(2)　$x^2y=\dfrac{1}{3}$ から　$2\log_3 x+\log_3 y=\log_3\dfrac{1}{3}$

よって，(1) から　$2a+2b=-1$　　ゆえに　$a+b=\dfrac{{}^{イウ}-1}{{}^{エ}2}$

(3)　$a+2b=3$ から　$\log_3 x+\log_3 y=3$

よって　$\log_3 xy=3$　　ゆえに　$xy=27$

$x>0,\ y>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}=6\sqrt{3}$

等号は $x=y=3\sqrt{3}\left(a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{3}{4}\right)$ のとき成り立つ.

よって，$x+y$ の最小値は　${}^{オ}6\sqrt{{}^{カ}3}$

(4)　$x>1,\ y>1$ から　$a>0,\ b>0$

また　$xy=3^a\times 3^{2b}=3^{a+2b}$

$a>0,\ b>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により　$a+2b\geqq 2\sqrt{2ab}=4$

等号は $a=2b$ かつ $ab=2$ かつ $a>0,\ b>0$ すなわち $a=2,\ b=1$ のとき成り立つ.

よって，xy の最小値は　$3^4={}^{キク}81$

14 [1997センター]

$\log_2(x^2+\sqrt{2})$ は，底 $2>1$ であるから増加関数.

よって $x={}^{ア}0$ のとき最小値 $\log_2\sqrt{2}=\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2}$ をとる.

$t=\log_2(x^2+\sqrt{2})$ とおくと，① から　$t^2-2t+a=0,\ t\geqq\dfrac{1}{2}$

すなわち　$t=1\pm\sqrt{1-a},\ t\geqq\dfrac{1}{2}$

よって，解をもつ条件は　$1-a\geqq 0,\ 1+\sqrt{1-a}\geqq\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$a\leqq {}^{エ}1$

$a=1$ のとき　$t^2-2t+1=0$ から　$t=1$ すなわち $\log_2(x^2+\sqrt{2})=1$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$ であるから，方程式 ① は ${}^{オ}2$ 個の解をもつ.

また，方程式 ① が 3 個の解をもつのは，$x=0$ を解にもつとき.

よって　$t^2-2t+a=0$ が $t=\dfrac{1}{2}$ を解にもてばよいから

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}+a=0$　　ゆえに　$a=\dfrac{{}^{カ}3}{{}^{キ}4}$

$\boxed{15}$ [1997センター]

真数は正であるから　$x-2>0$，$x-3>0$，$x+1>0$

共通範囲を求めて　$x>3$　…… ①

$f(x)=0$ から　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)=0$

よって　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)=\log_3(x+1)$

ゆえに　$\log_3(x-2)(x-3)=\log_3(x+1)$

よって　$(x-2)(x-3)=x+1$

整理して　$x^2-{}^{ア}6x+{}^{イ}5=0$

したがって　$(x-1)(x-5)=0$

ゆえに，① から　$x={}^{ウ}5$

また，$f(x)\leqq 0$ とすると　$1\leqq x\leqq 5$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　${}^{エ}3<x\leqq{}^{オ}5$

$\boxed{16}$ [2006センター]

(1)　x は対数の底であるから　$x>{}^{ア}0$ かつ $x\neq{}^{イ}1$

また　$\log_x 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 x}=\dfrac{{}^{ウ}3}{\log_3 x}$

(2)　(*) から　$2\log_3 x-4\cdot\dfrac{3}{\log_3 x}\leqq 5$

すなわち　$2\log_3 x-\dfrac{12}{\log_3 x}\leqq 5$　…… ①

[1]　$0<x<1$ のとき　$\log_3 x<0$

よって，① の両辺に $\log_3 x$ を掛けると　$2(\log_3 x)^2-12\geqq 5\log_3 x$

ゆえに　${}^{エ}2(\log_3 x)^2-{}^{オ}5\log_3 x-{}^{カキ}12\geqq 0$

すなわち　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\geqq 0$

$\log_3 x<0$ より $\log_3 x-4<0$ であるから　$2\log_3 x+3\leqq 0$

よって　$\log_3 x\leqq-\dfrac{3}{2}$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^{-\frac{3}{2}}$　すなわち　$x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$0<x<1$ との共通範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[2]　$x>1$ のとき　$\log_3 x>0$

よって，① の両辺に $\log_3 x$ を掛けて整理すると

$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\leqq 0$

すなわち　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\leqq 0$

$\log_3 x>0$ より $2\log_3 x+3>0$ であるから　$\log_3 x-4\leqq 0$

よって　$\log_3 x\leqq 4$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^4$　すなわち　$x\leqq 81$

$x>1$ との共通範囲は　$1<x\leqq 81$

[1]，[2] から，求める x の値の範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{{}^{ク}3}}{{}^{ケ}9}$，$1<x\leqq{}^{コサ}81$

17 [2006センター]

(1)　x は対数の底であるから　$x>{}^{\text{ア}}0$ かつ $x \neq {}^{\text{イ}}1$

また　$\log_x 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 x} = \dfrac{{}^{\text{ウ}}3}{\log_3 x}$

(2)　(*) から　$2\log_3 x - 4\cdot\dfrac{3}{\log_3 x} \leqq 5$

すなわち　$2\log_3 x - \dfrac{12}{\log_3 x} \leqq 5$　……①

[1]　$0<x<1$ のとき　$\log_3 x<0$

よって，① の両辺に $\log_3 x$ を掛けると　$2(\log_3 x)^2 - 12 \geqq 5\log_3 x$

ゆえに　${}^{\text{エ}}2(\log_3 x)^2 - {}^{\text{オ}}5\log_3 x - {}^{\text{カキ}}12 \geqq 0$

すなわち　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\geqq 0$

$\log_3 x<0$ より $\log_3 x - 4<0$ であるから　$2\log_3 x+3 \leqq 0$

よって　$\log_3 x \leqq -\dfrac{3}{2}$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^{-\frac{3}{2}}$　すなわち　$x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$0<x<1$ との共通範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[2]　$x>1$ のとき　$\log_3 x>0$

よって，① の両辺に $\log_3 x$ を掛けて整理すると

$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leqq 0$

すなわち　$(\log_3 x - 4)(2\log_3 x+3)\leqq 0$

$\log_3 x>0$ より $2\log_3 x+3>0$ であるから　$\log_3 x - 4 \leqq 0$

よって　$\log_3 x\leqq 4$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^4$　すなわち　$x \leqq 81$

$x>1$ との共通範囲は　$1<x\leqq 81$

[1]，[2] から，求める x の値の範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ク}}3}}{{}^{\text{ケ}}9}$，$1<x\leqq{}^{\text{コサ}}81$

18 [2005センター]

(1)　$2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y$ から　$x = \log_2\left(\dfrac{5}{2}\right)^y = y\log_2\dfrac{5}{2} = y(\log_2 {}^{\text{ア}}5 - {}^{\text{イ}}1)$

したがって　$b-a = \dfrac{5}{2} y - 2x = \dfrac{5}{2} y - 2y(\log_2 5 - 1) = y\left(\dfrac{{}^{\text{ウ}}9}{2} - 2\log_2 5\right)$　……①

ここで　$\dfrac{9}{2} = \log_2 2^{\frac{9}{2}} = \log_2 16\sqrt{2}$

$2\log_2 5 = \log_2 5^2 = \log_2 25$

$16\sqrt{2} < 25$ であり，底 2 は 1 より大きいから

$\log_2 16\sqrt{2} < \log_2 25$　すなわち　$\dfrac{9}{2} < 2\log_2 5$

$y>0$ であるから，① より　$b-a<0$

よって，$b<a$ であるから，a と b を比べると ${}^{\text{エ}}a$ の方が大きい。

(2)　$2^x = 3^z$ から　$x = \log_2 3^z = z\log_2 {}^{\text{オ}}3$

したがって　$c-a = 3z-2x = 3z - 2z\log_2 3 = z(3-2\log_2 3)$　……②

ここで　$3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$

$2\log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_2 9$

$8<9$ であり，底 2 は 1 より大きいから

$\log_2 8 < \log_2 9$　すなわち　$3<2\log_2 3$

$z>0$ であるから，② より　$c-a<0$

よって，$c<a$ であるから，a と c を比べると ${}^{\text{カ}}a$ の方が大きい。

(3)　$\left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ から　$\left(\dfrac{5}{2}\right)^{6y} = 3^{6z}$　……③

$3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であるから　$\left(\dfrac{5}{2}\right)^{6y} = \left\{\left(\dfrac{5}{2}\right)^6\right\}^y > (3^5)^y = 3^{5y}$　……④

③，④ から　$3^{6z} > 3^{5y}$　よって　$6z>5y$

ゆえに　$b-c = \dfrac{5}{2} y - 3z = \dfrac{1}{2}(5y-6z)<0$

よって，$b<c$ となるから，${}^{\text{キ}}b < {}^{\text{ク}}c < {}^{\text{ケ}}a$ が成り立つ。

センター過去問⑥（指数･対数関数）　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

19 [2005センター]

真数は正であるから　$x-1>0$

よって　$x>1$　……②

$d=\log_{10}2$ とおくと

$$\log_2 27=\frac{\log_{10}27}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\frac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}d}\log_{10}3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\frac{\log_{10}(x-1)}{\log_{10}\frac{1}{2}}=\frac{\log_{10}(x-1)}{-\log_{10}2}=-\frac{1}{{}^{\text{ウ}}d}\log_{10}(x-1)$$

$$\log_5\{27(x-1)\}=\frac{\log_{10}\{27(x-1)\}}{\log_{10}5}$$

ここで　$\log_{10}\{27(x-1)\}=\log_{10}27+\log_{10}(x-1)=3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)$

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-d$$

よって　$\log_5\{27(x-1)\}=\dfrac{{}^{\text{エ}}3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{{}^{\text{オ}}1-{}^{\text{カ}}d}$

したがって，不等式①から

$$\frac{3}{d}\log_{10}3+\frac{1}{d}\log_{10}(x-1)+3\cdot\frac{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{1-d}<0$$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{3}{1-d}\right)\{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)\}<0$

$0<\log_{10}2<\log_{10}10$ であるから，$0<d<1$ であり　$\dfrac{1}{d}+\dfrac{3}{1-d}>0$

よって，①を解くことは不等式

$${}^{\text{キ}}3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)<0$$

を解くことと同値である。これを変形して　$\log_{10}27(x-1)<\log_{10}1$

底10は1より大きいから　$27(x-1)<1$

ゆえに　$x<\dfrac{28}{27}$　……③

②，③から，①を満たす x の値の範囲は　${}^{\text{ク}}1<x<\dfrac{{}^{\text{ケコ}}28}{{}^{\text{サシ}}27}$

20 [2004センター]

真数は正であるから　$x-1>0,\ 3-x>0$

すなわち　$1<x<3$　……①

$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$ から　$\log_2(x-1)+\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2\frac{1}{2}}\leqq 0$

すなわち　$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$

ゆえに　$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$

底2は1より大きいから　$x-1\leqq 3-x$　　よって　$x\leqq 2$　……②

①，②から　${}^{\text{ア}}1<x\leqq{}^{\text{イ}}2$

このとき　$2^1<2^x\leqq 2^2$　　$X=2^x$ とおくと　${}^{\text{ウ}}2<X\leqq{}^{\text{エ}}4$

また　$y=4^x-6\cdot 2^x+10=(2^x)^2-6\cdot 2^x+10=X^2-6X+10$

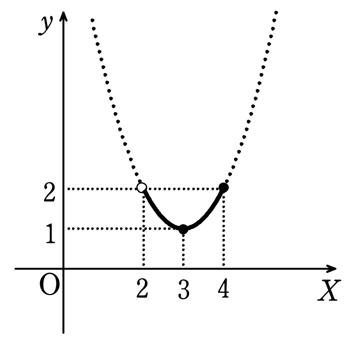
$$=(X-{}^{\text{オ}}3)^{{}^{\text{カ}}2}+{}^{\text{キ}}1$$

右のグラフから，$2<X\leqq 4$ において，

y は　$X=4$　すなわち　$x={}^{\text{ク}}2$ のとき最大値 ${}^{\text{ケ}}2$

　　$X=3$　すなわち　$x=\log_2{}^{\text{コ}}3$ のとき最小値 ${}^{\text{サ}}1$

をとる．



センター過去問⑥（指数･対数関数）　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{21}$ [2004センター]

(1)　$y=\log_2(4-x^2)$ において，真数は正であるから　$4-x^2>0$

これを解いて　$-{}^{\text{ア}}2<x<{}^{\text{イ}}2$　…… ①

また，$y=\log_2(4-a^2+2ax-x^2)$ において，真数は正であるから

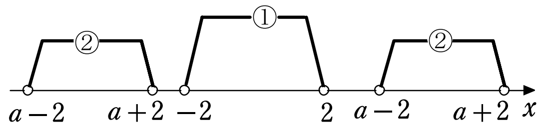
$$4-a^2+2ax-x^2>0$$

よって　　$x^2-2ax+(a-2)(a+2)<0$

すなわち　$\{x-(a-2)\}\{x-(a+2)\}<0$

$a-2<a+2$ であるから　${}^{\text{ウ}}a-{}^{\text{エ}}2<x<a+2$　…… ②

(2)　求める条件は，①，② をともに満たす x の値が少なくとも 1 つあることである．①，② をともに満たす x の値が存在しない条件は，右の図から

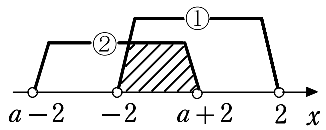


$a+2\leqq-2$ または $2\leqq a-2$

すなわち　$a\leqq-4$，$4\leqq a$

よって，求める条件は　$-{}^{\text{オ}}4<a<{}^{\text{カ}}4$

①，② が右の図のようになるとき



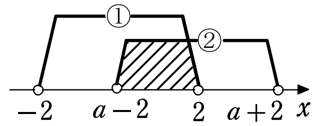
$$a-2\leqq-2<a+2\leqq2$$

すなわち　$-4<a\leqq{}^{\text{キ}}0$

このとき，x の定義域は　${}^{\text{クケ}}-2<x<{}^{\text{コ}}a+{}^{\text{サ}}2$

（または ${}^{\text{クケ}}-2<x<{}^{\text{コ}}2+{}^{\text{サ}}a$）

①，② が右の図のようになるとき



$$-2<a-2<2<a+2$$

すなわち　$0<a<4$

このとき，x の定義域は　${}^{\text{シ}}a-{}^{\text{ス}}2<x<{}^{\text{セ}}2$

(3)　$a=-2$ のとき，$-4<a\leqq0$ であるから，(2) より　$-2<x<0$

$f(x)=1$ とすると　$\log_2(4-x^2)-\log_2(4-4-4x-x^2)=1$

すなわち　$\log_2(4-x^2)=\log_2(-4x-x^2)+\log_2 2$

よって　　$\log_2(4-x^2)=\log_2 2(-4x-x^2)$

ゆえに　　$4-x^2=2(-4x-x^2)$

すなわち　$x^2+8x+4=0$　　ゆえに　$x=-4\pm2\sqrt{3}$

$-2<x<0$ であるから　$x=-{}^{\text{ソ}}4+{}^{\text{タ}}2\sqrt{{}^{\text{チ}}3}$