センター過去問⑥（指数･対数関数）　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ [2003センター]

正の数 x に対して $a=\log_3 x-\frac{7}{2}$，$b=\log_3 x-\frac{5}{2}$，$c=\log_9 x-\frac{5}{2}$，$d=\log_9 x-\frac{3}{2}$ とおく．

(1) $d=0$ となるような x の値は $x=\boxed{\text{アイ}}$ である．

(2) $abcd>0$ となるような x の値の範囲を求めよう．

a，b，c，d のすべてが負の場合には $0<x<\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ となる．

a，b，c，d のうち二つが正で残り二つが負の場合には

$\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ となる．

さらに，a，b，c，d のすべてが正の場合には $\boxed{\text{コサシ}}<x$ となる．

(3) $\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ の範囲において，a，b，c，d の間には大小関係 $\boxed{\text{ス}}<\boxed{\text{セ}}<\boxed{\text{ソ}}<\boxed{\text{タ}}$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ [2003センター]

実数 a に対し，x の方程式 $\log_4(x-1)+\log_4(4-x)=\log_4(a-x)$　……① を考える．

これを解くことは，$1<x<4$　かつ　$x<\boxed{\text{ア}}$ の範囲で方程式

$-x^2+\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}=a$　……② を解くことと同じである．

(1) 2次方程式②は，$a=\boxed{\text{エ}}$ のとき重解 $x=\boxed{\text{オ}}$ をもつ．したがって，方程式①が，ただ一つの解をもつのは，$a=\boxed{\text{エ}}$　または　$\boxed{\text{カ}}<a\leqq\boxed{\text{キ}}$ のときである．

(2) $a=\boxed{\text{キ}}$ のときの方程式①の解は，$x=\boxed{\text{ク}}$ である．そのときの①の右辺の値は $\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

$\boxed{3}$［2002センター］

対数関数 $f(x)=\log_2 x$，$g(x)=\log_2(x+a)$ について考える．

関数 $y=g(x)$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{アイ}}$ だけ平行移動したものである．ただし，$a>0$ とする．

(1)　$F(x)=g(x)-f(x)$ とする．

$F(2)=1$ となるのは，$a=\boxed{\text{ウ}}$ のときである．

$F(1)=2F(3)$ となるのは，$a=\boxed{\text{エ}}$ のときである．

(2)　次に $h(x)=\log_4(4x+b)$　$(b>0)$ とする．

$g(1)=h(1)$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)$ となるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，　$b=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ のときである．

$\boxed{4}$［2002センター］

座標平面上において，$2\log_7 x-\log_7 y-3=0$ により表される図形を C とし $\log_7 x-\log_7 y-a=0$ により表される図形を L とする．

(1)　C は曲線 $y=7^{\boxed{\text{アイ}}}x^{\boxed{\text{ウ}}}$ の $x>0$ の部分であり，

L は直線 $y=7^{\boxed{\text{エオ}}}x$ の $x>0$ の部分である．

(2)　C と L の交点は $\left(7^{\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}},\ 7^{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケコ}}}\right)$ である．

(3)　$7^{\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}}\leqq x$ の範囲において，C と L，および直線 $x=\frac{3}{2}\cdot 7^{\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}}$

によって囲まれた部分の面積を $T(a)$ とすると $T(a)=\dfrac{7^{\boxed{\text{サ}}-\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

(4)　$\log_7 T(a)\leqq 0$ となる最小の整数 a は $\boxed{\text{ソ}}$ である．

5 [2001センター]

方程式 $\dfrac{4}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{2^x}=1$ の解 x を求めよう．

$$X=\frac{1}{(\sqrt{2})^x}\ \cdots\cdots ①$$

とおくと，X の方程式 $\boxed{\text{ア}}X^2+\boxed{\text{イ}}X-1=0$ が得られる．

一方，① より $X>\boxed{\text{ウ}}$ である．

したがって　$X=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ を得る．

これから，求める x は $x=\boxed{\text{カ}}\log_2\boxed{\text{キ}}$ となる．

6 [2001センター]

五つの数

$0,\ 1,\ a=\log_5 2^{1.5},\ b=\log_5 3^{1.5},\ c=\log_5 0.5^{1.5}$

を小さい順に並べると

$\boxed{\text{ア}}<0<\boxed{\text{イ}}<\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$

である．

$\boxed{7}$ [2001センター]

方程式

$$6^x - \frac{2^x}{27} - 27\cdot 3^x + 1 = 0$$

を考える．$X=2^x$，$Y=3^x$ とおくと，この方程式の左辺は

$$\left(X - \boxed{\text{アイ}}\right)\left(Y - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\right)$$

と因数分解される．したがって，この方程式の解 x は二つあり，そのうち小さい方の解は $\boxed{\text{カキ}}$ であり，大きい方の解の整数部分は $\boxed{\text{ク}}$ である．

$\boxed{8}$ [2000センター]

(1)　関数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ に対して $f(x-1)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\cdot 3^x+\boxed{\text{ウ}}\cdot 3^{-x}$ である．

また，$f(x-1)=f(x)$ を満たす x を求めると，$x=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，このときの

$f(x)$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(2)　関数 $y=\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$ ……① のグラフは，関数 $y=\log_2 x$ ……② のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{サシ}}$ だけ平行移動したものである．①と②のグラフの共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ス}},\ 1+\log_2\boxed{\text{セ}}\right)$ である．

$\boxed{9}$ [2000センター]

x，t は実数で $\log_3(x+3^t)=2t-2$ を満たしているとする．

(1)　x は t を用いて

$$x=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\cdot 3^{\boxed{\text{ウ}}\,t}-\boxed{\text{エ}}^{\,t}$$

と表される．

(2)　$t=0$ のとき，$x=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(3)　$x=2\cdot3^t$ のとき，$t=\boxed{\text{ク}}$ である．

(4)　$x=-\dfrac{9}{4}$ のとき，$t=2-\log_3\boxed{\text{ケ}}$ である．

$\boxed{10}$ [1999センター]

実数 x に対して，$y=5\cdot3^x+2\cdot3^{-x}$，$z=5\cdot3^x-2\cdot3^{-x}$ とおくと $y^2-z^2=\boxed{\text{アイ}}$ である．$z=0$ となるのは $3^x=\sqrt{\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}}$ のときであり，y は

$$x=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\left(\log_3\boxed{\text{キ}}-\log_3\boxed{\text{ク}}\right)$$

のとき最小値 $\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}$ をとる．

$\boxed{11}$［1999センター］

a は 2 より小さい定数とする．関数 $y=\log_2\left(\dfrac{2}{3}x-a\right)$ において $x=4$ のとき $y=m$ であり，$x=13$ のとき $y=n$ であるとすると $2^n-2^m=\boxed{\text{ア}}$ である．さらに，m，n がともに正の整数であるとすると，$m=\boxed{\text{イ}}$，$n=\boxed{\text{ウ}}$ となり，$a=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

$\boxed{12}$［1998センター］

正の定数 a に対して，方程式 $5\cdot2^{-x}+2^{x+3}=2a$ …… ① を考える．

$t=2^x$ とおくと，方程式 ① は $t^2-\dfrac{a}{\boxed{\text{ア}}}t+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{8}=0$ …… ② となり，さらに

$\left(t-\dfrac{a}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2+\dfrac{\boxed{\text{エオ}}-a^2}{\boxed{\text{カキ}}}=0$ と変形される．したがって，

$a>\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式 ② は 2 個の解をもつ．

また，$a=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式 ① は，ただ 1 つの解

$x=\dfrac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(\log_2\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\right)$ をもつ．

$\boxed{13}$［1998センター］

$a=\log_3 x,\ b=\log_9 y$ とする．

(1)　$y=9^b$ であるから，$\boxed{\text{ア}}\,b=\log_3 y$ である．

(2)　$x^2 y=\dfrac{1}{3}$ ならば，$a+b=\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

(3)　$a+2b=3$ ならば，$x+y$ の最小値は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(4)　$ab=2$ ならば，$x>1,\ y>1$ のときの xy の最小値は $\boxed{\text{キク}}$ である．

$\boxed{14}$［1997センター］

x の関数 $\log_2(x^2+\sqrt{2})$ は $x=\boxed{\text{ア}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ をとる．

a を定数とするとき，x の方程式

$$\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0 \cdots\cdots ①$$

が解をもつ条件は　$a\leqq\boxed{\text{エ}}$ である．$a=\boxed{\text{エ}}$ のとき方程式①は $\boxed{\text{オ}}$ 個の解をもち，また，方程式①が3個の解をもつのは　$a=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のときである．

$\boxed{15}$ [1997センター]

$f(x)=\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)$ とする.

$f(x)=0$ を変形すると，2 次方程式 x^2- ア $\boxed{}x+$ イ $\boxed{}=0$ を得る.

したがって，$f(x)=0$ の解は $x=$ ウ $\boxed{}$ であり，$f(x)\leqq 0$ となる x の値の範囲は

エ $\boxed{}<x\leqq$ オ $\boxed{}$ である.

$\boxed{16}$ [2006センター]

不等式 $2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$ ……(*) が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1)　不等式(*)において，x は対数の底であるから

$$x>\text{ア}\boxed{}\quad \text{かつ}\quad x\neq\text{イ}\boxed{}$$

を満たさなければならない。また，$\log_x 27=\dfrac{\text{ウ}\boxed{}}{\log_3 x}$ である。

(2)　不等式(*)は ア $\boxed{}<x<$ イ $\boxed{}$ のとき

$$\text{エ}\boxed{}(\log_3 x)^2-\text{オ}\boxed{}\log_3 x-\text{カキ}\boxed{}\geqq 0$$

$x>$ イ $\boxed{}$ のとき

$$\text{エ}\boxed{}(\log_3 x)^2-\text{オ}\boxed{}\log_3 x-\text{カキ}\boxed{}\leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$$\text{ア}\boxed{}<x\leqq\frac{\sqrt{\text{ク}\boxed{}}}{\text{ケ}\boxed{}},\quad \text{イ}\boxed{}<x\leqq\text{コサ}\boxed{}$$

である。

$\boxed{17}$［2006センター］

不等式 $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5$ ……(*) が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1)　不等式(*)において，x は対数の底であるから

$$x > \boxed{\text{ア}} \quad \text{かつ} \quad x \neq \boxed{\text{イ}}$$

を満たさなければならない。また，$\log_x 27 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\log_3 x}$ である。

(2)　不等式(*)は $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ のとき

$$\boxed{\text{エ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{オ}}\log_3 x - \boxed{\text{カキ}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{イ}}$ のとき

$$\boxed{\text{エ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{オ}}\log_3 x - \boxed{\text{カキ}} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad \boxed{\text{イ}} < x \leqq \boxed{\text{コサ}}$$

である。

$\boxed{18}$［2005センター］

x，y，z は正の数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき $a = 2x$，$b = \dfrac{5}{2}y$，$c = 3z$ とおき，a，b，c の大小関係を調べよう。

(1)　$x = y\left(\log_2 \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\right)$ であるから $b - a = y\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2} - 2\log_2 \boxed{\text{ア}}\right)$ である。

したがって，a と b を比べると $\boxed{\text{エ}}$ の方が大きい。

(2)　$x = z\log_2 \boxed{\text{オ}}$ であるから $c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{\text{オ}}\right)$ である。

したがって，a と c を比べると $\boxed{\text{カ}}$ の方が大きい。

(3)　$3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，a，b，c の間には大小関係

$\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ が成り立つことがわかる。

19 [2005センター]

不等式

$$\log_2 27 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 3\log_5\{27(x-1)\} < 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう。

$d = \log_{10} 2$ とおくと

$$\log_2 27 = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\log_{10} 3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -\frac{1}{\boxed{ウ}}\log_{10}(x-1)$$

$$\log_5\{27(x-1)\} = \frac{\boxed{エ}\log_{10} 3 + \log_{10}(x-1)}{\boxed{オ} - \boxed{カ}}$$

であるから，① を解くことは不等式 $\boxed{キ}\log_{10} 3 + \log_{10}(x-1) < 0$ を解くことと同じである。これにより，求める x の値の範囲は $\boxed{ク} < x < \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である。

20 [2004センター]

不等式 $\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leqq 0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{ア} < x \leqq \boxed{イ}$ である．

x がこの範囲にあるとき $y = 4^x - 6 \cdot 2^x + 10$ の最大値と最小値を求めよう．

$X = 2^x$ とおくと，X のとる値の範囲は $\boxed{ウ} < X \leqq \boxed{エ}$ であり

$y = \left(X - \boxed{オ}\right)^{\boxed{カ}} + \boxed{キ}$ である．

したがって，y は $x = \boxed{ク}$ のとき最大値 $\boxed{ケ}$ をとり，$x = \log_2 \boxed{コ}$ のとき最小値 $\boxed{サ}$ をとる．

$\boxed{21}$ [2004センター]

a を定数として $f(x)=\log_2(4-x^2)-\log_2(4-a^2+2ax-x^2)$ とする．

(1)　関数 $y=\log_2(4-x^2)$ の定義域は，区間 $-\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である．

また，関数 $y=\log_2(4-a^2+2ax-x^2)$ の定義域は，区間

$\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}<x<\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}$ である．

(2)　少なくとも一つの実数 x に対して $f(x)$ の値が定まるような a の値の範囲は

$-\boxed{\text{オ}}<a<\boxed{\text{カ}}$ である．

このとき，関数 $y=f(x)$ の定義域は

$-\boxed{\text{オ}}<a\leqq\boxed{\text{キ}}$ ならば $\boxed{\text{クケ}}<x<\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}$

$\boxed{\text{キ}}<a<\boxed{\text{カ}}$ ならば $\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}<x<\boxed{\text{セ}}$

で定まる区間である．（$\boxed{\text{コ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ は解答の順序を問わない．）

(3)　$a=-2$ のとき，方程式 $f(x)=1$ の解は $x=-\boxed{\text{ソ}}+\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である．