1 [2003センター]

(1) $\dfrac{-6\sqrt{3}}{18}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，この等比数列の公比は　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

この等比数列の一般項を b_n とすると　$b_n=18\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

よって，第 6 項は　$b_6=18\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=\dfrac{18}{-9\sqrt{3}}=\dfrac{^{\text{アイ}}-2\sqrt{^{\text{ウ}}3}}{^{\text{エ}}3}$

$n=2m-1$ とおくと　$b_n=18\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2m-2}=18\left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-1}$

よって，求める和は

$$\sum_{m=1}^{8} b_n=\sum_{m=1}^{8} 18\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}=\frac{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3^3\left(1-\frac{1}{3^8}\right)$$

$$=\frac{3^8-1}{3^5}=\frac{6561-1}{243}=\frac{^{\text{オカキク}}6560}{^{\text{ケコサ}}243}$$

(2) 第 k 区画に含まれる項の個数は k である．

よって，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数は

$$\sum_{k=1}^{20} k=\frac{20\cdot21}{2}={}^{\text{シスセ}}210\ (\text{個})$$

ゆえに，a_{215} は第 21 区画の項であるから　$a_{215}={}^{\text{ソタ}}21$

また，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は

$$\sum_{k=1}^{20} k^2=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}={}^{\text{チツテト}}2870$$

$3000-2870=130$ で，$21\times6=126$，$21\times7=147$ であるから，求める最小の自然数 n の値は　　$n=210+7={}^{\text{ナニヌ}}217$

2 [2003センター]

(1) $(3x+2y)^5$ の展開式における一般項は　${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(2y)^r$

x^2y^3 となるのは $r=3$ のときで，その係数は

$${}_5\mathrm{C}_3\cdot3^2\cdot2^3=10\cdot9\cdot8={}^{\text{アイウ}}720$$

$\{(3x+2y)+z\}^8$ を展開したとき，z^3 の項をまとめると

$${}_8\mathrm{C}_3(3x+2y)^{8-3}z^3={}_8\mathrm{C}_{^{\text{エ}}5}(3x+2y)^{^{\text{エ}}5}z^3$$

で表される．

$(3x+2y)^5$ の展開式で x^2y^3 の係数は 720 であるから，$(3x+2y+z)^8$ の展開式で $x^2y^3z^3$ の係数は

$${}_8\mathrm{C}_5\times720=56\times720={}^{\text{オカキクケ}}40320$$

また，$(3x+2y)^5$ の展開式における一般項 ${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(2y)^r$ について

$r=0$ のとき　${}_5\mathrm{C}_0(3x)^5(2y)^0=243x^5$

$r=1$ のとき　${}_5\mathrm{C}_1(3x)^4(2y)^1=810x^4y$

$r=2$ のとき　${}_5\mathrm{C}_2(3x)^3(2y)^2=1080x^3y^2$

$r=4$ のとき　${}_5\mathrm{C}_4(3x)^1(2y)^4=240xy^4$

$r=5$ のとき　${}_5\mathrm{C}_5(3x)^0(2y)^5=32y^5$

したがって，$(3x+2y+z)^8$ の展開式で，z^3 の項のうち係数が最大のものは

$$1080\times56x^3y^2z^3={}^{\text{コサシスセ}}60480x^{^{\text{ソ}}3}y^{^{\text{タ}}2}z^3$$

(2) $a_n=ar^{n-1}$ と表される．

$a_4=54$ であるから　$ar^3=54$　すなわち　$ar^3=2\cdot3^3$

a は正の整数，r は 1 より大きい整数であるから　$a={}^{\text{チ}}2$，$r={}^{\text{ツ}}3$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

また，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k$ であるから

$$S_n=1\cdot2+2\cdot2\cdot3+3\cdot2\cdot3^2+4\cdot2\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot2\cdot3^{n-1}$$

$$3S_n=\qquad 1\cdot2\cdot3+2\cdot2\cdot3^2+3\cdot2\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2\cdot3^{n-1}+n\cdot2\cdot3^n$$

ゆえに　$3S_n-S_n=-(2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1})+n\cdot2\cdot3^n$

$$=-\frac{2(3^n-1)}{3-1}+2n\cdot3^n$$

$$=({}^{\text{テ}}2n-{}^{\text{ト}}1)^{\text{ナ}}3^n+{}^{\text{ニ}}1$$

よって　$S_n=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)3^n+1\}$

したがって　$S_6=\dfrac{1}{2}\{(2\cdot6-1)3^6+1\}={}^{\text{ヌネノハ}}4010$

3 [2002センター]

(1)　$a_1+2a_2=0$ から　$a_2=-\dfrac{1}{2}a_1$　　よって，公比は　$\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}2}$

$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ から　$a_1-\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{4}a_1=\dfrac{9}{4}$

すなわち　$\dfrac{3}{4}a_1=\dfrac{9}{4}$　　ゆえに　$a_1=3$

よって　$a_4+a_5+a_6=3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-\frac{3}{32}=\frac{{}^{\text{エオ}}-9}{{}^{\text{カキ}}32}$$

また，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列の第 n 項までの和であるから　$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\dfrac{1-(-2)^n}{9}$

ゆえに，$\dfrac{1-(-2)^n}{9}=57$ のとき　$(-2)^n=-512$　　よって　$n={}^{\text{ク}}9$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(pk+q)=p\cdot\frac{n(n+1)}{2}+qn$

$b_7=1$ から　　$7p+q=1$　$\cdots\cdots$ ①

$S_{12}=10$ から　$78p+12q=10$　$\cdots\cdots$ ②

①，② を解くと　$p=\dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}3}$，$q=\dfrac{{}^{\text{サシ}}-4}{{}^{\text{ス}}3}$

$S_n=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{4}{3}n=\dfrac{1}{6}n^2-\dfrac{7}{6}n$ であるから

$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_{12}=\displaystyle\sum_{n=1}^{12}S_n=\frac{1}{6}\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}-\frac{7}{6}\cdot\frac{12\cdot13}{2}=\frac{{}^{\text{セソ}}52}{{}^{\text{タ}}3}$

4 [2002センター]

(1)　太枠内の一番上に現れる数列は，初項 4，末項 40，項数 10 の等差数列であるから，

その和は　$\dfrac{10\times(4+40)}{2}={}^{\text{アイウ}}220$

(2)　太枠内の一番左に現れる数列は，初項 4，公比 2，項数 10 の等比数列であるから，

その和は　$\dfrac{4(2^{10}-1)}{2-1}={}^{\text{エオカキ}}4092$

(3)　太枠内に現れるすべての数は，二つの数列

$2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 20$　　と　　$2,\ 4,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 1024$

から 1 項ずつとって掛け合わせたもののすべての組み合わせであるから，

その和は　$(2+4+6+\cdots\cdots+20)(2+4+8+\cdots\cdots+1024)$ に等しい．

よって　$\dfrac{10\times(2+20)}{2}\times\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}={}^{\text{クケコサシス}}225060$

(4)　$S=2\cdot2+4\cdot2^2+6\cdot2^3+\cdots\cdots+20\cdot2^{10}$

$2S=\qquad 2\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+18\cdot2^{10}+20\cdot2^{11}$

辺々引くと

$S-2S=2\cdot2+2\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots\cdots+2\cdot2^{{}^{\text{セソ}}10}-20\cdot2^{{}^{\text{タチ}}11}$

$\qquad=4092-40960=-36868$

ゆえに　$S={}^{\text{ツテトナニ}}36868$

5 [2001センター]

(1)　$a_3-a_1=4$　から　$a_3=2+4={}^{\text{ア}}6$

$a_4-a_2=4$　から　$a_4=3+4={}^{\text{イ}}7$

$a_5-a_3=4$　から　$a_5=6+4={}^{\text{ウエ}}10$

$a_6-a_4=4$　から　$a_6=7+4={}^{\text{オカ}}11$

また，与えられた漸化式から

$a_1=2,\ a_{2m+1}-a_{2m-1}=4$　$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　　$\cdots\cdots$ ①

$a_2=3,\ a_{2m+2}-a_{2m}=4$　$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　　$\cdots\cdots$ ②

よって，$m\geqq2$ のとき

$a_{2m-1}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}4=2+4(m-1)=4m-2$　　$\cdots\cdots$③

$a_{2m}=a_2+\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}4=3+4(m-1)=4m-1$　　$\cdots\cdots$④

③，④ で，$m=1$ とすると $a_1=2$，$a_2=3$ となり，③，④ は $m=1$ のときも成り立つ．

ゆえに　$a_{40}=a_{2\times20}=4\times20-1={}^{\text{キク}}79$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{40}a_k=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{20}a_{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{20}(4k-2)+\sum_{k=1}^{20}(4k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(8k-3)=8\times\frac{20\times21}{2}-3\times20={}^{\text{ケコサシ}}1620$$

(2)　数列 $\{b_n-c\}$ の初項を a とすると　$b_n-c=a\cdot 2^{n-1}$　　よって　$b_n=a\cdot 2^{n-1}+c$

$b_3=7$ から　$a\cdot 2^{3-1}+c=7$　すなわち　$4a+c=7$ …… ①

$b_4=11$ から　$a\cdot 2^{4-1}+c=11$　すなわち　$8a+c=11$ …… ②

①，② から　$c={}^{ス}3$，$a=1$　　よって　$b_1=1\cdot 2^{1-1}+3={}^{セ}4$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k=\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+3)=\frac{2^{10}-1}{2-1}+3\times 10={}^{ソタチツ}1053$

$\boxed{6}$ [2001センター]

$a_1=S_1=p-p+p+3=p+{}^{ア}3$

$a_2=S_2-S_1=4p-2p+p+3-(p+3)={}^{イ}2p$

$a_3=S_3-S_2=9p-3p+p+3-(3p+3)={}^{ウ}4p$

(1)　$\{a_n\}$ が等差数列のとき　$2a_2=a_1+a_3$　が成り立つ.

ゆえに　$2\cdot 2p=(p+3)+4p$　　よって　$p={}^{エオ}-3$

このとき，$\{a_n\}$ は初項 $a_1=0$，公差 $a_2-a_1=-6$ の等差数列であるから

$a_n={}^{カキ}-6n+{}^{ク}6$

更に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k=\sum_{k=1}^{10}(k+1)(-6k+6)=-6\sum_{k=1}^{10}(k^2-1)$

$\displaystyle=-6\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+6\cdot 10={}^{ケコサシス}-2250$

(2)　$b_1=a_1=p+3$，$b_2=-2a_2=-4p$，$b_3=3a_3=12p$

よって，$\{b_n\}$ が等比数列のとき　$\displaystyle r=\frac{b_3}{b_2}=\frac{12p}{-4p}={}^{セソ}-3$

また，${b_2}^2=b_1b_3$ が成り立つから　$(-4p)^2=(p+3)\cdot 12p$

ゆえに　$16p^2=12p^2+36p$　　したがって　$4p(p-9)=0$

$p\neq 0$ であるから　$p={}^{タ}9$

したがって，$\{b_n\}$ は初項 12，公比 -3 の等比数列であるから　$b_n=12(-3)^{n-1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}12(-3)^{k-1}=12\cdot\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=3\{1-(-3)^n\}$

ゆえに　$3\{1-(-3)^n\}>900$　とすると　$(-3)^n<-299$

ここで，$(-3)^5=-243>-299$，$(-3)^7=-2187<-299$

であるから，最小の n は ${}^{チ}7$

$\boxed{7}$ [2000センター]

(1)　$a_{13}=0$ から　　$a+(13-1)d=0$

よって　$a+{}^{アイ}12d=0$ …… ①

また，$b_3=a_{10}$ から　$ar^{3-1}=a+(10-1)d$

よって　$ar^2=a+9d$ …… ②

① から　$\displaystyle d=-\frac{a}{12}$ …… ③

これを ② に代入して　$\displaystyle ar^2=a+9\left(-\frac{a}{12}\right)$

ゆえに　$\displaystyle ar^2=\frac{a}{4}$

$a>0$ であるから　$\displaystyle r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$ であるから　$\displaystyle r=\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}$

(2)　$\displaystyle S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

これに ③ を代入して　$\displaystyle S_n=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\left(-\frac{a}{12}\right)\right\}=\frac{na}{24}(25-n)$ …… ④

$S_n<0$ とすると　$\displaystyle\frac{na}{24}(25-n)<0$

$\displaystyle\frac{na}{24}>0$ であるから　$25-n<0$

よって　$n>25$

これを満たす最小の自然数 n は ${}^{オカ}26$

(3)　④ から，$S_{10}=25$ のとき　$\displaystyle\frac{10a}{24}(25-10)=25$

これを解いて　$a={}^{キ}4$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k=\frac{a(1-r^6)}{1-r}=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{{}^{クケ}63}{{}^{コ}8}$

$\boxed{8}$［2000センター］

(1)　$S_{m+1}=\dfrac{(m+1)(a_1+a_{m+1})}{2}$ であるから　$258=\dfrac{(m+1)(38+5)}{2}$

よって　$12=m+1$　ゆえに　$m={}^{アイ}11$

公差を d とすると，$a_{m+1}=5$ すなわち $a_{12}=5$ から　$38+(12-1)d=5$

ゆえに　$d={}^{ウエ}-3$

このとき　$a_n=38+(n-1)(-3)=41-3n$

$a_n\geqq 0$ とすると　$41-3n\geqq 0$

よって　$n\leqq\dfrac{41}{3}=13.6\cdots\cdots$

ゆえに　$1\leqq n\leqq 13$　のとき　$a_n\geqq 0$,

$n\geqq 14$　のとき　$a_n<0$

したがって，S_n は $n={}^{オカ}13$ のとき最大である．

また　$S_{13}=\dfrac{13\{2\cdot 38+(13-1)\cdot(-3)\}}{2}={}^{キクケ}260$

別解　［S_{13} の求め方］

$S_{13}=S_{12}+a_{13}=258+(41-3\cdot 13)={}^{キクケ}260$

(2)　$T_2=b_1(1+r)$,

$T_4=b_1(1+r+r^2+r^3)=b_1\{1+r+r^2(1+r)\}=b_1(1+r)(1+r^2)$

よって　$T_4=(r^2+{}^{コ}1)T_2$　…… ①

また，$5T_2=4T_4$ から　$T_4=\dfrac{5}{4}T_2$ …… ②

①，② から　$r^2+1=\dfrac{5}{4}$

ゆえに　$r^2=\dfrac{1}{4}$　$r>0$ であるから　$r=\dfrac{{}^{サ}1}{{}^{シ}2}$

$$U_n=p+T_n=p+\sum_{k=1}^{n}b_1\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=p+b_1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=p+2b_1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=p+2b_1-b_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，数列 $\{U_n\}$ が等比数列となるのは　$p+2b_1=0$

すなわち　$p={}^{スセ}-2b_1$ のときである．

$\boxed{9}$［1999センター］

$a_n=-100+5(n-1)={}^{ア}5(n-{}^{イウ}21)$

(1)　$b_m=a_{(1+2+2^2+\cdots+2^{m-2})+1}=a_{2^{m-1}}$　から，$b_m=5(2^{m-1}-21)$

ゆえに　$b_8=5\times 107={}^{エオカ}535$

$b_1+b_2+\cdots\cdots+b_8=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}5(2^{k-1}-21)=5\times\frac{2^8-1}{2-1}-8\times 5\times 21={}^{キクケ}435$

(2)　6 番目の区画は a_{32}　a_{33}　……　a_{63}

これは，初項 $a_{32}=55$，末項 $a_{63}=210$，項数 32 の等差数列である．

したがって，和は $\dfrac{32(55+210)}{2}={}^{コサシス}4240$

$\boxed{10}$［1999センター］

(1)　$S_{10}=\dfrac{10}{2}\{2a+(10-1)d\}={}^{ア}5({}^{イ}2a+{}^{ウ}9d)$

$S_{16}=\dfrac{16}{2}\{2a+(16-1)d\}=8(2a+15d)$

よって　$5(2a+9d)=-5$ …… ①　$8(2a+15d)=8$ …… ②

①，② から　$a={}^{エオ}-2$，$d=\dfrac{{}^{カ}1}{{}^{キ}3}$

このとき　$a_n=-2+(n-1)\times\dfrac{1}{3}$

$-2+(n-1)\times\dfrac{1}{3}\leqq 0$　を解くと　$n\leqq 7$

したがって，最小の値は　$S_6=S_7=\dfrac{6}{2}\left\{2(-2)+(6-1)\times\dfrac{1}{3}\right\}={}^{クケ}-7$

(2)　$c_1+c_2+\cdots\cdots+c_{40}=(c_1+c_2+c_3+c_4)+\cdots\cdots+(c_{37}+c_{38}+c_{39}+c_{40})$

$=(1+2+3+0)+\cdots\cdots+(1+2+3+0)$

$=6\times 10$

$={}^{コサ}60$

$b_n=15\cdot 2^{n-1}$ であるから

$b_1c_1+b_2c_2+\cdots\cdots+b_{40}c_{40}$

$=(b_1c_1+b_5c_5+\cdots\cdots+b_{37}c_{37})+(b_2c_2+b_6c_6+\cdots\cdots+b_{38}c_{38})$

$+(b_3c_3+b_7c_7+\cdots\cdots+b_{39}c_{39})$

$=(b_1+b_5+\cdots\cdots+b_{37})+(b_2+b_6+\cdots\cdots+b_{38})\times 2+(b_3+b_7+\cdots\cdots+b_{39})\times 3$

$=15(1+2^4+\cdots\cdots+2^{36})+15\cdot 2(1+2^4+\cdots\cdots+2^{36})\times 2$

$+15\cdot 2^2(1+2^4+\cdots\cdots+2^{36})\times 3$

$=15\cdot 17\cdot\dfrac{(2^4)^{10}-1}{2^4-1}$

$={}^{シス}17\left(2^{{}^{セソ}40}-1\right)$

$\boxed{11}$ [1998センター]

中央の項を a とする.

(1)　$(a-4)+(a-2)+a=(a+2)+(a+4)$　　よって　$a={}^{アイ}12$

(2)　$(a-2n)+\{a-2(n-1)\}+\cdots\cdots+a=(a+2)+\cdots\cdots+(a+2n)$

すなわち　$(n+1)a-2(1+2+\cdots\cdots+n)=na+2(1+2+\cdots\cdots+n)$

よって　$a=2n(n+1)={}^{ウ}2n^2+{}^{エ}2n$

(3)　$(a-4)^2+(a-2)^2+a^2=(a+2)^2+(a+4)^2$

よって　$a^2-24a=0$　　ゆえに　$a={}^{オカ}24$

(4)　$(a-2n)^2+\{a-2(n-1)\}^2+\cdots\cdots+a^2=(a+2)^2+\cdots\cdots+(a+2n)^2$

よって　$a^2-8(1+2+\cdots\cdots+n)a=0$　　ゆえに　$a={}^{キ}4n^2+{}^{ク}4n$

$\boxed{12}$ [1998センター]

$1+2b_1=5-\dfrac{7}{2}$ から　$b_1=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}4}$

よって　$a_n=1+(n-1)d=dn-(d-1)$, $b_n=\dfrac{1}{4}+(n-1)e=en-\left(e-\dfrac{1}{4}\right)$ となる.

$a_n+2b_n=5n-\dfrac{7}{2}$ から　$dn-(d-1)+2\left\{en-\left(e-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=5n-\dfrac{7}{2}$ ……①

この式が n の恒等式であるから　$d+2e={}^{ウ}5$

また　$a_nb_n=3n^2-4n+\dfrac{5}{4}$ から　$\{dn-(d-1)\}\left\{en-\left(e-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=3n^2-4n+\dfrac{5}{4}$ ……②

この式が n の恒等式であるから　$de={}^{エ}3$, $(d-1)\left(e-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$

第2式から　$de-\left(\dfrac{d}{4}+e\right)+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$　　よって　$\dfrac{d}{4}+e={}^{オ}2$

このとき ①, ② は確かに成り立つ.

$d+2e=5$, $\dfrac{d}{4}+e=2$ から　$d=2$, $e=\dfrac{3}{2}$

これは $de=3$ を満たすから適している.

ゆえに　$a_n={}^{カ}2n-{}^{キ}1$, $b_n=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}2}n-\dfrac{{}^{コ}5}{{}^{サ}4}$

したがって　$c_k=\dfrac{(2k-1+3)^2}{6k-5+11}=\dfrac{2}{3}(k+1)$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{{}^{シ}1}{{}^{ス}3}n^2+n$

$\boxed{13}$ [1997センター]

$S_n=\dfrac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\}=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

よって　$p=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}d$, $r={}^{ウ}0$　　ゆえに　$S_n=pn^2+qn$

よって　$a_1=S_1=p+q$ であるから, $p=2, q=3$ のとき　$a_1=2+3={}^{エ}5$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+3n-2(n-1)^2-3(n-1)=4n+1$

ここで $n=1$ とすると　$a_1=5$ となり, $n=1$ のときも成り立つ.

ゆえに　$a_n={}^{オ}4n+{}^{カ}1$

よって　$\displaystyle a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(4k+1)\{4(k+1)+1\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(16k^2+24k+5)$

$=16\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+24\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+5n\right)=\dfrac{n({}^{キク}16n^2+{}^{ケコ}60n+{}^{サシ}59)}{{}^{ス}3}$

また　$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{4n+1}-\dfrac{1}{4(n+1)+1}\right\}$ であるから

$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{4\cdot 1+1}-\dfrac{1}{4(n+1)+1}\right\}=\dfrac{n}{{}^{セ}5({}^{ソ}4n+{}^{タ}5)}$

$\boxed{14}$［1997センター］

初項 7，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=7\cdot 2^{n-1}$

$a_n<1000$ とすると　$7\cdot 2^{n-1}<1000$

$a_8=7\cdot 2^7=896$，$a_9=7\cdot 2^8=1792$ であるから，最大の数は ${}^{アイウ}896$ であり，それは第 ${}^{エ}8$ 項である．

初項 13，公差 15 の等差数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=13+(n-1)\cdot 15=15n-2$

$b_n<1000$ とすると　$15n-2<1000$

よって　$n<\dfrac{1002}{15}=66.8$

ゆえに，最大の数は $b_{66}=15\times 66-2={}^{オカキ}988$ であり，それは第 ${}^{クケ}66$ 項である．

数列 $\{a_n\}$ のなかで 1000 より小さい数は

$a_1=7$，$a_2=14$，$a_3=28$，$a_4=56$，

$a_5=112$，$a_6=224$，$a_7=448$，$a_8=896$

このうち，$15n-2$ の形に表される数は，28 と 448 の 2 つだけである．

よって，最小の数は ${}^{コサ}28$，最大の数は ${}^{シスセ}448$

$\boxed{15}$［2004センター］

(1)　$a_n=a+(n-1)d$，$b_n=-2r^{n-1}$ である．

(i)　$a_{10}=-15$，$a_{20}=-45$ から　$a+9d=-15$，$a+19d=-45$

これを解いて　$a={}^{アイ}12$，$d={}^{ウエ}-3$

(ii)　$a_1=b_2$，$a_2=b_1$，$a_3=b_3$ から

$a=-2r$　……①，　$a+d=-2$　……②，　$a+2d=-2r^2$　……③

① を ② に代入して　$-2r+d=-2$　　よって　$d=2r-2$　……④

①，④ を ③ に代入して　$-2r+2(2r-2)=-2r^2$

整理して　$r^2+r-2=0$　　すなわち　$(r+2)(r-1)=0$

$r\fallingdotseq 1$ であるから　$r=-2$

④ に代入して　$d=2\cdot(-2)-2=-6$

したがって　$d={}^{オカ}-6$，$r={}^{キク}-2$

(2)　$c_{n+1}=-c_n+n^2+3$ から　$c_{n+1}+c_n=n^2+3$　……①

また，① の n を $n+1$ におき換えると　$c_{n+2}+c_{n+1}=(n+1)^2+3$　……②

②−① から　$c_{n+2}-c_n=(n+1)^2-n^2$

よって　$c_{n+2}-c_n=2n+1$　……③

③ において，$n=23$ を代入すると　$c_{25}-c_{23}=2\cdot 23+1={}^{ケコ}47$

また，$n=23$，21，19，……，1 を ③ にそれぞれ代入すると

$c_{25}-c_{23}=2\cdot 23+1$

$c_{23}-c_{21}=2\cdot 21+1$

$c_{21}-c_{19}=2\cdot 19+1$

$\vdots$

$c_3-c_1=2\cdot 1+1$

これら 12 個の式を辺々加えると

$c_{25}-c_1=2(23+21+19+\cdots\cdots+1)+1\cdot 12$

よって　$c_{25}=c_1+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 12(23+1)+12$

$=2+288+12={}^{サシス}302$

$\boxed{16}$［2004センター］

(1)　等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とする．ただし，$\{a_n\}$ は整数からなる数列であるから a，r は整数である．

$a_1+a_2=32$，$a_4+a_5=864$ から　$a+ar=32$　……①，　$ar^3+ar^4=864$　……②

② から　$r^3(a+ar)=864$

これに ① を代入すると　$32r^3=864$

よって　$r^3=27$

r は整数であるから　$r=3$　……③

③ を ① に代入して　$a+3a=32$

よって　$a=8$　……④

③，④ から　$a_n={}^{ア}8\cdot{}^{イ}3^{n-1}$

このとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=8\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}+4\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}1$

$=8\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1}+4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-2n$

$={}^{ウ}4\cdot{}^{エ}3^n+{}^{オ}2n^2-{}^{カ}4$

(2) $\dfrac{9}{37}=0.2432432\cdots\cdots=0.\dot{2}4\dot{3}$

よって $b_n=\begin{cases}2 & (n=3m-2)\\ 4 & (n=3m-1)\\ 3 & (n=3m)\end{cases}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\{b_n\}$ は 3 項ごとに同じ数が現れるから　$p={}^{キ}3$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{m=1}^{33}(b_{3m-2}+b_{3m-1}+b_{3m})+b_{100}$

$\displaystyle=\sum_{m=1}^{33}(2+4+3)+2$

$=9\times33+2={}^{クケコ}299$

$n(n+2)$ は単調に増加し，

$n=99$ のとき　$n(n+2)=99\cdot101=9999$

$n=100$ のとき　$n(n+2)=100\cdot102=10200$

ゆえに，① を満たす最大の自然数 n は ${}^{シス}99$

$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ であるから

$\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)$，$\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{{}^{セ}2}-\dfrac{1}{4}\right)$，……，$\dfrac{1}{b_8}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{{}^{ソ}8}-\dfrac{1}{10}\right)$

したがって

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{{}^{タチ}29}{45}$

$\boxed{17}$［2005センター］

(1) $d=3d-c$ を解くと　$d=\dfrac{c}{{}^{ア}2}$

ゆえに　$a_{n+1}-\dfrac{c}{2}=3\left(a_n-\dfrac{c}{2}\right)$

$a_n-\dfrac{c}{2}=x_n$ とすると　$x_{n+1}=3x_n$

また　$x_1=a_1-\dfrac{c}{2}=3-\dfrac{c}{2}$

よって　$x_n=\left(3-\dfrac{c}{2}\right)\cdot3^{n-1}$

$a_n=x_n+\dfrac{c}{2}$ であるから

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\left(x_k+\frac{c}{2}\right)=\sum_{k=1}^{8}x_k+\sum_{k=1}^{8}\frac{c}{2}=\left(3-\frac{c}{2}\right)\sum_{k=1}^{8}3^{k-1}+8\cdot\frac{c}{2}$

$=\left(3-\dfrac{c}{2}\right)\cdot\dfrac{3^8-1}{3-1}+4c=3280\left(3-\dfrac{c}{2}\right)+4c={}^{イウエオ}9840-{}^{カキクケ}1636c$

(2) $\{b_n\}$ は初項が 3 で，階差数列の第 n 項が $2n+3$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$\displaystyle b_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$

$=n^2+2n$　(この式は $n=1$ のときにも成り立つ)

よって　$p={}^{コ}2$，$q={}^{サ}0$

$b_n<10000$ とすると　$n^2+2n<10000$

すなわち　$n(n+2)<10000$　……①

$\boxed{18}$［2005センター］

(1) $a_1=S_1=-1^2+24\cdot1={}^{アイ}23$

$a_2=S_2-a_1=(-2^2+24\cdot2)-23={}^{ウエ}21$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(-n^2+24n)-\{-(n-1)^2+24(n-1)\}=-2n+25$

（これは $n=1$ のときにも成り立つ。）

$a_n<0$ とすると　$-2n+25<0$

よって　$n>\dfrac{25}{2}=12.5$

n は自然数であるから　$n\geqq{}^{オカ}13$

ゆえに，$1\leqq n\leqq12$ のとき　$a_n>0$

$n\geqq13$　のとき　$a_n<0$

したがって

$\displaystyle\sum_{k=1}^{40}|a_k|=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{40}(-a_k)=\sum_{k=1}^{12}a_k-\left(\sum_{k=1}^{40}a_k-\sum_{k=1}^{12}a_k\right)=2\sum_{k=1}^{12}a_k-\sum_{k=1}^{40}a_k=2S_{12}-S_{40}$

$=2(-12^2+24\cdot12)-(-40^2+24\cdot40)=288+640={}^{キクケ}928$

(2)（ｉ）$b_k=1\cdot3^{k-1}=3^{k-1}$

$b_3=3^2=9$，$b_4=3^3=27$ であるから　$c_{10}=b_3={}^{コ}9$

$b_4=27$，$b_5=81$ であるから，$c_n=27$ である自然数 n は全部で $80-26={}^{サシ}54$ (個) ある。

（ⅱ） $b_1=1,\ b_2=3,\ b_3=9,\ b_4=27,\ b_5=81$

よって，$1\leqq n<3$ のとき　$c_n=1$

$3\leqq n<9$ のとき　$c_n=3$

$9\leqq n<27$ のとき　$c_n=9$

$27\leqq n\leqq 30$ のとき　$c_n=27$

したがって

$$\sum_{k=1}^{30}c_k=1\cdot 2+3\cdot(8-2)+9\cdot(26-8)+27\cdot(30-26)=2+18+162+108={}^{\text{スセソ}}290$$

$\boxed{19}$ [2006センター]

(1)　$a,\ b,\ c$ が等差数列をなすから　$2b=a+c$ ……①

$c,\ a,\ b$ が等比数列をなすから　$a^2=bc$ ……②

① から　$c=2b-a$ ……③

③ を ② に代入すると　$a^2=b(2b-a)$　　よって　$2b^2-ab-a^2=0$

すなわち　$(b-a)(2b+a)=0$　　$b\neq a$ であるから　$b=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}2}a$ ……④

これを ③ に代入すると　$c={}^{\text{エオ}}-2a$

また，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は　$b-a=-\dfrac{1}{2}a-a=\dfrac{{}^{\text{カキ}}-3}{{}^{\text{ク}}2}a$

(2)　④ から，等比数列 $\{y_n\}$ の公比は　$-\dfrac{1}{2}$

よって，$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は

$$\frac{c\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-2a\left(1-\frac{1}{256}\right)}{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}a\cdot\frac{255}{256}=\frac{{}^{\text{ケコサ}}-85}{{}^{\text{シス}}64}a$$

(3)　階差数列 $\{w_n\}$ の初項は　$c-b=-2a-\left(-\dfrac{1}{2}a\right)=-\dfrac{3}{2}a$

第 2 項は　$a-c=a-(-2a)=3a$

よって，$\{w_n\}$ が等差数列であるとき，公差は　$3a-\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=\dfrac{{}^{\text{セ}}9}{{}^{\text{ソ}}2}a$

ゆえに　$w_n=-\dfrac{3}{2}a+(n-1)\times\dfrac{9}{2}a=\dfrac{{}^{\text{タ}}9n-{}^{\text{チツ}}12}{{}^{\text{テ}}2}a$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$z_n=b+\sum_{k=1}^{n-1}w_k=-\frac{1}{2}a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9k-12}{2}a$$

$$=-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a\sum_{k=1}^{n-1}(3k-4)=-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a\left\{3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-4(n-1)\right\}$$

$$=\frac{a}{4}(9n^2-33n+22)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$z_n=\dfrac{a}{{}^{\text{ト}}4}({}^{\text{ナ}}9n^2-{}^{\text{ニヌ}}33n+{}^{\text{ネノ}}22)$

$\boxed{20}$ [2007センター]

(1)　$a_{n+1}=3a_n+60$ を変形すると　$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$

よって，数列 $\{a_n+30\}$ は初項 $a_1+30=-27+30=3$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n+30=3\cdot 3^{n-1}$　　よって　$a_n={}^{\text{ア}}3^n-{}^{\text{イウ}}30$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-30)=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\frac{{}^{\text{エ}}3}{{}^{\text{オ}}2}({}^{\text{カ}}3^n-{}^{\text{キ}}1)-30n$$

また，$S_n>0$ とすると　$\dfrac{3}{2}(3^n-1)-30n>0$

変形すると　$3^n>20n+1$ ……①

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，3^n と $20n+1$ の値を計算すると，右の表のようになる。

n	1	2	3	4	5
3^n	3	9	27	81	243
$20n+1$	21	41	61	81	101

ゆえに，① が成り立つ最小の自然数 n は

$n=5$

したがって，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は　$n={}^{\text{ク}}5$

(2)　条件から　$2b_n+c_n=d(n-1)$，　$b_n-2c_n=xr^{n-1}$

$d(n-1)=A$，$xr^{n-1}=B$ とおくと

$2b_n+c_n=A$ ……②，　$b_n-2c_n=B$ ……③

②× 2+③ から　$5b_n=2A+B$　　よって　$b_n=\dfrac{2}{5}A+\dfrac{1}{5}B$

②−③× 2 から　$5c_n=A-2B$　　よって　$c_n=\dfrac{1}{5}A-\dfrac{2}{5}B$

したがって　$b_n+c_n=\left(\dfrac{2}{5}A+\dfrac{1}{5}B\right)+\left(\dfrac{1}{5}A-\dfrac{2}{5}B\right)=\dfrac{3}{5}A-\dfrac{1}{5}B$

$$=\frac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}5}d(n-1)-\frac{{}^{サ}1}{{}^{シ}5}xr^{n-1}$$

別解　②× 3−③ から　　$5b_n+5c_n=3A-B$

よって　　$b_n+c_n=\frac{3}{5}A-\frac{1}{5}B=\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}xr^{n-1}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列であるから

$$a_n=b_{n+1}+c_{n+1}-(b_n+c_n)=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n-\frac{3}{5}d(n-1)+\frac{1}{5}xr^{n-1}$$

$$=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}$$

これが (1) の $a_n=3^n-30$ と同じであるから

$$r=3,\ \frac{1}{5}x(1-r)=3,\ \frac{3}{5}d=-30$$

これを解くと　　$r={}^{ス}3,\ x=\frac{{}^{セソタ}-15}{{}^{チ}2},\ d={}^{ツテト}-50$

このとき，(2) において，$A=-50(n-1)$，$B=-\frac{15}{2}\cdot 3^{n-1}=-\frac{5}{2}\cdot 3^n$ であるから

$$b_n=\frac{2}{5}A+\frac{1}{5}B=\frac{2}{5}\cdot\{-50(n-1)\}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 3^n$$

$$=-\frac{{}^{ナ}3^n}{{}^{ニ}2}-{}^{ヌネ}20(n-1)$$

$$c_n=\frac{1}{5}A-\frac{2}{5}B=\frac{1}{5}\cdot\{-50(n-1)\}-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 3^n$$

$$={}^{ノ}3^n-{}^{ハヒ}10(n-1)$$