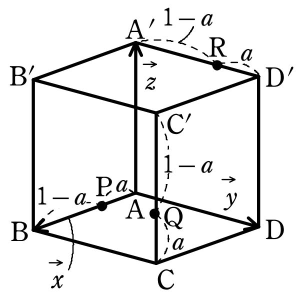
$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=({}^{ア}1-{}^{イ}a)\vec{x}+\vec{y}+{}^{ウ}a\vec{z}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'R}=-a\vec{x}+\vec{z}+(1-a)\vec{y}$

$={}^{エオ}-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$




ここで，ABCD−A′B′C′D′ は，１辺の長さ１の立方体であるから　$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=1$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0$

よって，一般に

$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z})\cdot(\alpha'\vec{x}+\beta'\vec{y}+\gamma'\vec{z})=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$ である．

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|^2=(1-a)^2+1^2+a^2=2a^2-2a+2$,

$|\overrightarrow{PR}|^2=(-a)^2+(1-a)^2+1^2=2a^2-2a+2$

したがって　$|\overrightarrow{PQ}|^2:|\overrightarrow{PR}|^2=1:1$　　よって　$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:{}^{カ}1$

また　$|\overrightarrow{PQ}|^2={}^{キ}2(a^2-a+{}^{ク}1)$

また　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(1-a)\cdot(-a)+1\cdot(1-a)+a\cdot1=a^2-a+{}^{ケ}1$

$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を $\theta$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\frac{a^2-a+1}{\{\sqrt{2(a^2-a+1)}\}^2}=\frac{1}{2}$$

よって　$\theta={}^{コサ}60^\circ$

(2) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=-\vec{y}+a\vec{x}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})$

$=-\vec{y}+a\vec{x}+\frac{1}{3}\{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}+(-a)\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}$

$=\dfrac{{}^{シ}1+{}^{ス}a}{{}^{セ}3}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$　$\left(\text{または}\ \dfrac{{}^{シ}a+{}^{ス}1}{{}^{セ}3}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})\right)$

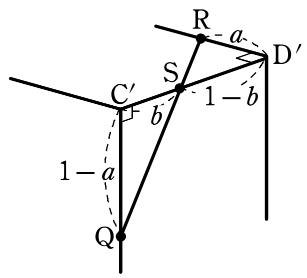
$C'S:SD'=b:(1-b)$　とすると，三平方の定理から

$SQ^2=b^2+(1-a)^2$，$SR^2=(1-b)^2+a^2$

$SQ^2=SR^2$ から　$a=b$　　よって　$\overrightarrow{C'S}={}^{ソ}a\overrightarrow{C'D'}$

ゆえに　$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SD'}+\overrightarrow{D'D}=(1-a)(-\vec{x})-\vec{z}$

$=({}^{タ}a-{}^{チ}1)\vec{x}-\vec{z}$




(3) $\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{DG}=(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{DG}+|\overrightarrow{DG}|^2$

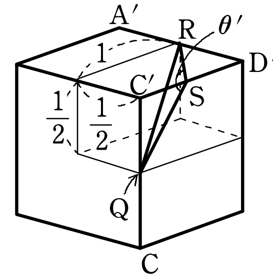
$=\left\{(a-1)\cdot\dfrac{1+a}{3}+(-1)\cdot\dfrac{1+a}{3}\right\}+\left(\dfrac{1+a}{3}\right)^2\{1^2+(-1)^2+1^2\}$

$=(1+a)\cdot\dfrac{2a-1}{3}$

$0<a<1$ であるから　$\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{DG}=0$ のとき　$a=\dfrac{{}^{ツ}1}{{}^{テ}2}$

このとき，Q，R，S はそれぞれ，CC′，D′A′，C′D′ の中点である．

よって　$RS=SQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



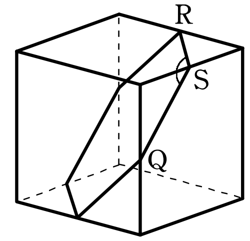

また，RQ は右図のような直方体 $\left(3\text{辺が}\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$ の対角線であるから　$RQ^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2=\dfrac{3}{2}$

$\angle QSR=\theta'$ $(0^\circ\leqq\theta'\leqq180^\circ)$ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta'=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\qquad\text{よって}\quad\theta'={}^{トナニ}120^\circ$$

参考　3点 Q，S，R を通る平面で立方体を切断すると，その切り口は正六角形になる．

よって　$\angle QSR={}^{トナニ}120^\circ$




$\boxed{2}$ (1) $|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{ON}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OM}|$ の両辺を２乗すると

$|\overrightarrow{OX}|^2-2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{ON}+|\overrightarrow{ON}|^2=2(|\overrightarrow{OX}|^2-2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OM}+|\overrightarrow{OM}|^2)$

条件より，$\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{OM}$　すなわち，$|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{OM}|$ であるから

$|\overrightarrow{OX}|^2+2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OM}+|\overrightarrow{OM}|^2=2(|\overrightarrow{OX}|^2-2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OM}+|\overrightarrow{OM}|^2)$

よって　$|\overrightarrow{OX}|^2-{}^{ア}6\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OX}+|\overrightarrow{OM}|^2=0$

$|\overrightarrow{OX}|^2-6\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OX}+9|\overrightarrow{OM}|^2=8|\overrightarrow{OM}|^2$

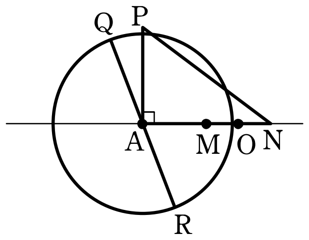
ゆえに　$|\overrightarrow{OX}-3\overrightarrow{OM}|^2=(2\sqrt{2}|\overrightarrow{OM}|)^2$

すなわち　$|\overrightarrow{OX}-3\overrightarrow{OM}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{OM}|$

これを満たす点 X 全体の描く図形は，半径 ${}^{イ}2\sqrt{{}^{ウ}2}|\overrightarrow{OM}|$ の円である．

また，その円の中心を A とすると　$\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OM}=\vec{0}$　　よって　$\overrightarrow{OA}={}^{エ}3\overrightarrow{OM}$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるから，4点A，M，O，Nはこの順に一直線上にある．




また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=1$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|={}^{\text{オ}}4$

AN$=4$，PN$=5$，PA$=3$ であるから，△APNは∠A$=90°$の直角三角形である．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}={}^{\text{カ}}0$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NR}}=(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AN}})$

QRは，点Aを中心とする円の直径であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NR}}=(-\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AN}})$

$$=-|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

①から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PN}}-|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$　　よって　${}^{\text{キ}}$③

$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|$ は点Aを中心とする円の半径であるから，(1)より　$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2\sqrt{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ のなす角を $\theta$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PN}}-|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{PN}}|\cos\theta-|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$$

$$=2\sqrt{2}\cdot5\cos\theta-(2\sqrt{2})^2=10\sqrt{2}\cos\theta-8$$

$\theta$ は，$0°\leqq\theta\leqq180°$ すべての値をとりうるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ が最小となるのは

$\cos\theta=-1$　すなわち　$\theta=180°$ のときである．よって　${}^{\text{ク}}$⑤

このとき，最小値は　$-{}^{\text{ケ}}8-{}^{\text{コサ}}10\sqrt{{}^{\text{シ}}2}$

これと，条件から　$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\dfrac{1}{b}|\vec{y}|^2$　　ゆえに　$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{1}{{}^{\text{シス}}2b}|\vec{y}|^2$

(3)　RQ∥SBから　$\dfrac{a+1}{b}=1$　…… ①

SP∥RBから　$a\left(1+\dfrac{1}{b}\right)=1$　…… ②

①，②から $b$ を消去して整理すると　$a^2+a-1=0$

これを解くと　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　$a>0$ であるから　$a=\dfrac{{}^{\text{セソ}}-1+\sqrt{{}^{\text{タ}}5}}{{}^{\text{チ}}2}$

これと①から　$b=\dfrac{{}^{\text{ツ}}1+\sqrt{{}^{\text{テ}}5}}{{}^{\text{ト}}2}$

(4)　(2)から　$-\dfrac{a}{2}|\vec{x}|^2=-\dfrac{1}{2b}|\vec{y}|^2$　　ゆえに　$\dfrac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2}=ab$

ここで，(3)から　$ab=1$　　よって　$\dfrac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}={}^{\text{ナ}}1$

$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$　　ここで，(2)から　$\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\dfrac{-\frac{1}{2b}|\vec{y}|^2}{|\vec{x}||\vec{y}|}=-\dfrac{1}{2b}$

更に，(3)から　$-\dfrac{1}{2b}=-\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

したがって　$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\dfrac{{}^{\text{ニ}}1-\sqrt{{}^{\text{ヌ}}5}}{{}^{\text{ネ}}4}$

$\boxed{3}$ (1)　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-\vec{x}-\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}b}\vec{y}$

$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=\overrightarrow{\mathrm{SA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}={}^{\text{ウエ}}-a\vec{x}-\vec{y}$

$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=\overrightarrow{\mathrm{SP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-({}^{\text{オ}}a+{}^{\text{カ}}1)\vec{x}-\vec{y}$

$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}=-\vec{x}-\left({}^{\text{キ}}1+\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}b}\right)\vec{y}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=(-a\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{x}=-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}$

これと，条件から　$-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{y}$　　ゆえに　$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{{}^{\text{コ}}a}{{}^{\text{サ}}2}|\vec{x}|^2$

$\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\vec{y}\cdot\left(-\vec{x}-\dfrac{1}{b}\vec{y}\right)=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\dfrac{1}{b}|\vec{y}|^2$

$\boxed{4}$ (1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ の両辺を平方して　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ であるから　$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$　…… ①

また，$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ の両辺を平方して　$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ であるから　$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=-3$　…… ②

①，②から　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=7$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{{}^{\text{エ}}7}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\theta$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{3}{2}$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=-\frac{3}{2}$　　よって　$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$ であるから，△ABC の面積は

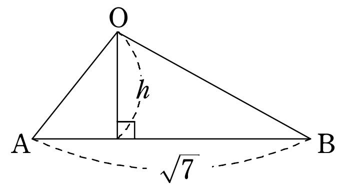
$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta=\frac{\sqrt{{}^{\text{オ}}3}}{{}^{\text{カ}}4}$$

O から辺 AB に下ろした垂線の長さを $h$ とする．

△OAB$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|h=\frac{\sqrt{7}}{2}h$

よって　$\frac{\sqrt{7}}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{4}$

ゆえに　$h=\frac{\sqrt{{}^{\text{キク}}21}}{{}^{\text{ケコ}}14}$

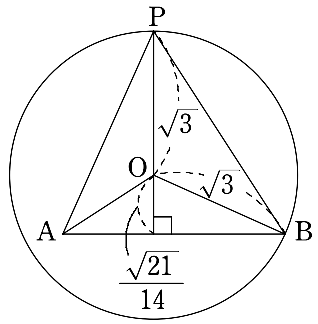



(3)　P は O を中心とした半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く．
P から AB に下ろした垂線の長さが最大となるのは，右の図より，P が直線 AB に関して O と同じ側にあり垂線が O を通るときであるから，その最大値は

$$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{21}}{14}=\sqrt{{}^{\text{サ}}3}\left(1+\frac{\sqrt{{}^{\text{シ}}7}}{{}^{\text{スセ}}14}\right)$$

このとき，$S$ も最大となるから最大値は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{14}\right)=\frac{\sqrt{{}^{\text{ソ}}3}+2\sqrt{{}^{\text{タチ}}21}}{{}^{\text{ツ}}4}$$




5 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

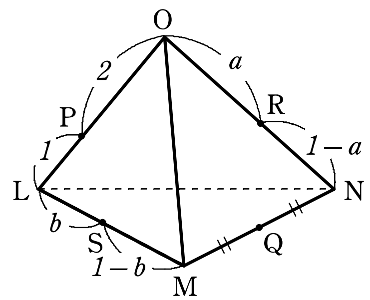
$=({}^{\text{ア}}1-{}^{\text{イ}}b)\vec{l}+{}^{\text{ウ}}b\vec{m}-{}^{\text{エ}}a\vec{n}$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$=\frac{{}^{\text{オ}}2}{{}^{\text{カ}}3}\vec{l}-{}^{\text{キ}}a\vec{n}$

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-a\vec{n}$

$=\frac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}2}\vec{m}+\left(\frac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サ}}2}-{}^{\text{シ}}a\right)\vec{n}$




(2)　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=x\overrightarrow{\mathrm{RP}}+y\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ と (1) から

$(1-b)\vec{l}+b\vec{m}-a\vec{n}=x\left(\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}\right)+y\left\{\frac{1}{2}\vec{m}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\vec{n}\right\}$

ゆえに　$\left(1-b-\frac{2}{3}x\right)\vec{l}+\left(b-\frac{y}{2}\right)\vec{m}+\left(-a+ax-\frac{y}{2}+ay\right)\vec{n}=\vec{0}$

ここで，四面体の頂点 O，L，M，N は同一平面上にないから

$1-b-\frac{2}{3}x=0$ …… ①，$b-\frac{y}{2}=0$ …… ②，$-a+ax-\frac{y}{2}+ay=0$ …… ③

① から　$x=\frac{{}^{\text{ス}}3}{{}^{\text{セ}}2}(1-b)$　　② から　$y={}^{\text{ソ}}2b$　　よって，③ において

$$-a+ax-\frac{y}{2}+ay=-a+a\cdot\frac{3}{2}(1-b)-b+2ab=\frac{1}{2}ab+\frac{a}{2}-b$$

であるから　$\frac{1}{2}ab+\frac{a}{2}-b=0$ すなわち ${}^{\text{タチ}}ab+{}^{\text{ツ}}a-{}^{\text{テト}}2b=0$ …… ④

(または　${}^{\text{タチ}}ba+{}^{\text{ツ}}a-{}^{\text{テト}}2b=0$ …… ④)

また　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}=\left(\frac{2}{3},\ 0,\ -a\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}\vec{m}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\vec{n}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-a\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-a\left(\frac{1}{2}-a\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が垂直のとき　$-a\left(\frac{1}{2}-a\right)=0$

$0<a<1$ であるから　$a=\frac{{}^{\text{ナ}}1}{{}^{\text{ニ}}2}$　　④ に代入すると　$\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}-2b=0$

ゆえに　$b=\frac{{}^{\text{ヌ}}1}{{}^{\text{ネ}}3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2}{3}\vec{l}+\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$,

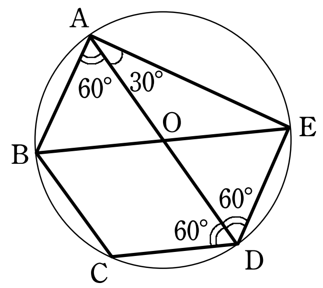
$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\vec{l}+\frac{1}{3}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{{}^{\text{ノハヒ}}-19}{{}^{\text{フヘ}}36}$$

センター過去問⑨（ベクトル）　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{6}$ (1)　図から　$\angle E=90°$，$\angle A=90°$




よって，AD と BE の交点 O が円の中心である．

ゆえに　$OA=OB$　また　$\angle BAO=60°$

よって，　$\triangle OAB$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形．

同様に，$OC=OD$，$\angle CDO=60°$ から，

$\triangle OCD$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形である．

したがって，$OB=OC$，$\angle BOC=180°-60°-60°=60°$

から，$\triangle BOC$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形．

ゆえに　$AB=BC=CO=OA$ であるから，

四角形 ABCO はひし形である．

よって　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}}{2}=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}\vec{a}+\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{{}^{オ}3}{{}^{カ}2}\vec{a}+\dfrac{{}^{キ}1}{{}^{ク}2}\vec{b}$

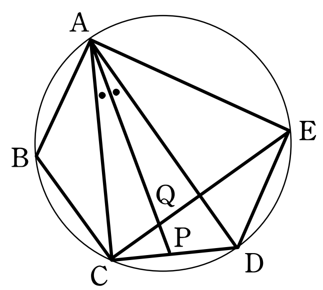
また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 90° であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ケ}0$

$|\overrightarrow{AC}|^2=\left|\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|^2=\dfrac{9}{4}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$

$\quad=\dfrac{9}{4}\cdot1^2+\dfrac{1}{4}(2^2-1^2)=3$

ゆえに　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{{}^{コ}3}$

(2)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AD}|}\overrightarrow{AC}+\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AD}|}\overrightarrow{AD}$




ここで，四角形 ABDE は長方形であるから

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}$　また　$|\overrightarrow{AD}|=2$

これらと (1) から

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+2}\left(\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}(\vec{a}+\vec{b})$

$\quad=(2-\sqrt{3})(3\vec{a}+\vec{b})+(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}(\vec{a}+\vec{b})$

$\quad=({}^{サ}3-\sqrt{{}^{シ}3})\vec{a}+(\sqrt{{}^{ス}3}-{}^{セ}1)\vec{b}$

$|\overrightarrow{AP}|^2=|(3-\sqrt{3})\vec{a}+(\sqrt{3}-1)\vec{b}|^2$

$\quad=(\sqrt{3}-1)^2(3|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$\quad=(4-2\sqrt{3})\cdot6={}^{ソタ}24-{}^{チツ}12\sqrt{{}^{テ}3}$

また，$CQ:QE=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AE}$

$\quad=(1-t)\left(\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)+t\vec{b}=\dfrac{3}{2}(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{2}(1+t)\vec{b}$

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ とすると　$\dfrac{3}{2}(1-t)=k(3-\sqrt{3})$，$\dfrac{1}{2}(1+t)=k(\sqrt{3}-1)$

これを解くと　$t=2-\sqrt{3}$，$k=\dfrac{\sqrt{{}^{ト}3}}{{}^{ナ}2}$

$\boxed{7}$ (1)　$\angle BOC=90°$ であるから　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}={}^{ア}0$

$\angle COD=90°$ であるから　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}={}^{イ}0$

また　$\angle BOD=180°-60°=120°$，

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$

よって　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle BOD$

$\quad=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos120°=\dfrac{{}^{ウエ}-3}{{}^{オ}2}$

(2)　点 P は線分 BD を $a:(1-a)$ の比に内分するから

$\overrightarrow{OP}=({}^{カ}1-{}^{キ}a)\overrightarrow{OB}+{}^{ク}a\overrightarrow{OD}$

また　$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OC}-\{(1-a)\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{OD}\}$

$\quad=({}^{ケ}a-{}^{コ}1)\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-{}^{サ}a\overrightarrow{OD}$，

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}-\{(1-a)\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{OD}\}$

$\quad=({}^{シ}a-{}^{ス}1)\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-{}^{セ}a\overrightarrow{OD}$

よって　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\{(a-1)\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-a\overrightarrow{OD}\}\cdot\{(a-1)\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-a\overrightarrow{OD}\}$

$\quad=|(a-1)\overrightarrow{OB}-a\overrightarrow{OD}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2$

$\quad=(a-1)^2|\overrightarrow{OB}|^2-2a(a-1)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}+a^2|\overrightarrow{OD}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2$

$\quad=(a-1)^2(\sqrt{3})^2-2a(a-1)\left(-\dfrac{3}{2}\right)+a^2(\sqrt{3})^2-1^2$

$\quad={}^{ソ}9a^2-{}^{タ}9a+{}^{チ}2$

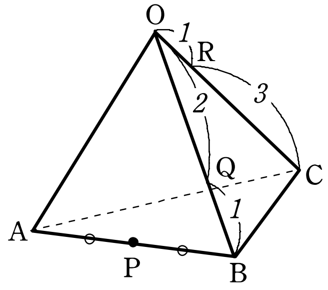
$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PC}$ が直交するとき　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

ゆえに　$9a^2-9a+2=0$　　よって　$(3a-1)(3a-2)=0$

したがって　$a=\dfrac{{}^{ツ}1}{{}^{テ}3}$，$\dfrac{{}^{ト}2}{{}^{ナ}3}$　$\left(または\ \dfrac{{}^{ツ}2}{{}^{テ}3},\ \dfrac{{}^{ト}1}{{}^{ナ}3}\right)$

これは $0<a<1$ を満たす．

**8** $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$




(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{4}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\dfrac{{}^{\text{ウエ}}-1}{{}^{\text{オ}}2}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{カ}}1}{{}^{\text{キ}}6}\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{c}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{{}^{\text{クケ}}-1}{{}^{\text{コ}}2}\vec{a}-\dfrac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}2}\vec{b}+\dfrac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セ}}4}\vec{c}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{8}\vec{a}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{12}\vec{b}\cdot\vec{a}-\dfrac{1}{12}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{24}\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{{}^{\text{ソ}}5}{{}^{\text{タチ}}24}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}\right|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2-\dfrac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{36}|\vec{b}|^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{7}{36}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ツ}}7}}{{}^{\text{テ}}6}$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right|^2$

$=\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{16}|\vec{c}|^2+\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{16}$

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\dfrac{{}^{\text{ト}}3}{{}^{\text{ナ}}4}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{\dfrac{5}{24}}{\dfrac{\sqrt{7}}{6}\cdot\dfrac{3}{4}}=\dfrac{{}^{\text{ニ}}5\sqrt{{}^{\text{ヌ}}7}}{{}^{\text{ネノ}}21}$

**9** 与式から　$(a+6)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{{}^{\text{ア}}a}{a+{}^{\text{イ}}6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{{}^{\text{ウ}}1}{a+{}^{\text{エ}}6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

BD : DC$=1:8$ ならば　$\dfrac{a}{a+6}:\dfrac{1}{a+6}=8:1$　　よって　$a={}^{\text{オ}}8$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{8}{14}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{14}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{9}{14}\left(\dfrac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{{}^{\text{カ}}9}{{}^{\text{キク}}14}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって　AP : PD$={}^{\text{ケ}}9:{}^{\text{コ}}5$

また，△ABC において，余弦定理を適用すると　$\cos A=\dfrac{8+6-10}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}={}^{\text{サ}}2$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=\left|\dfrac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$

$=\left(\dfrac{8}{9}\right)^2\cdot(2\sqrt{2})^2+2\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\cdot(\sqrt{6})^2$

$=\dfrac{550}{81}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\left|\dfrac{9}{14}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=\dfrac{81}{196}\cdot\dfrac{550}{81}=\dfrac{{}^{\text{シスセ}}275}{{}^{\text{ソタ}}98}$

**10** ① に $x=2$ を代入すると　$8+4a+2b+c=0$

ゆえに　$c=-{}^{\text{ア}}4a-{}^{\text{イ}}2b-{}^{\text{ウ}}8$ …… ②

よって　$x^3+ax^2+bx+c=x^3+ax^2+bx-4a-2b-8$

$=(x-2)\{x^2+(a+{}^{\text{エ}}2)x+{}^{\text{オ}}2a+b+{}^{\text{カ}}4\}$

複素数平面において 3 点 A(2)，B($\alpha$)，C($\beta$) は正方形の異なる 3 つの頂点になっているから，$\alpha$ と $\beta$ は共役複素数である．よって，題意の正方形は AB，AC を隣辺とする正方形である．

ゆえに　$\alpha=p+qi$ ($p$, $q$ は実数)とすると，$p<0$ から　$2-p=5$，$|q|=5$

よって，$\alpha$，$\beta$ は　${}^{\text{キク}}-3\pm{}^{\text{ケ}}5i$

このとき　$\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=34$ から　$-(a+2)=-6$，$2a+b+4=34$

ゆえに　$a={}^{\text{コ}}4$，$b={}^{\text{サシ}}22$

② から　$c={}^{\text{スセソ}}-68$

11 (1) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=2\cdot3\cos60^\circ={}^{\text{ア}}3$

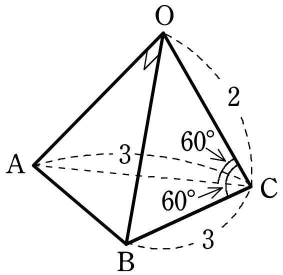
$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})=-4+3={}^{\text{イウ}}-1$

同様にして　$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{CO}|^2+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=4-1-1={}^{\text{エ}}2$




また，余弦定理により　$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60^\circ=7$

ゆえに　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{{}^{\text{オ}}7}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{{}^{\text{カキ}}14}$

(2) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}={}^{\text{ク}}3$

また　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})\cdot\overrightarrow{CM}$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CM}+t|\overrightarrow{CM}|^2$

$=-3+t\left\{3^2-\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\right\}$

$=-3+\dfrac{11}{2}t$

よって　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{CM}$ のとき $-3+\dfrac{11}{2}t=0$ から　$t=\dfrac{{}^{\text{ケ}}6}{{}^{\text{コサ}}11}$

12 $OA\perp OC$ であるから　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}={}^{\text{ア}}0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle COD=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{{}^{\text{イ}}2}$

また　$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=-\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{{}^{\text{ウ}}3}\overrightarrow{OC}+\dfrac{{}^{\text{エ}}2}{{}^{\text{ウ}}3}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EQ}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})+(1-a)(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(a-1)\overrightarrow{OA}+\left(\dfrac{1}{{}^{\text{オ}}3}-{}^{\text{カ}}a\right)\overrightarrow{OC}+\dfrac{{}^{\text{キ}}2}{{}^{\text{ク}}3}\overrightarrow{OD}$

よって

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(a-1)^2|\overrightarrow{OA}|^2+\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^2|\overrightarrow{OC}|^2+\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{OD}|^2+2(a-1)\left(\dfrac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$+2\cdot\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+2\cdot\dfrac{2}{3}(a-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

ここで $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(a-1)^2+\left(\dfrac{1}{3}-a\right)^2+\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}-a\right)=2\left(a-\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{7}{18}$

ゆえに　$a=\dfrac{{}^{\text{ケ}}5}{{}^{\text{コ}}6}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{18}}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{サシ}}14}}{{}^{\text{ス}}6}$

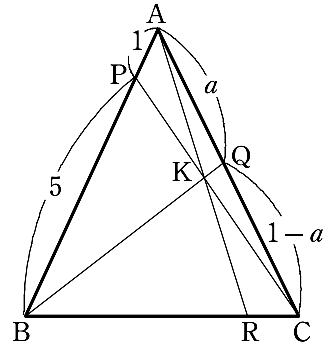
13 (1) $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+{}^{\text{ア}}a\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{{}^{\text{イ}}6}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$BK:KQ=t:(1-t)$, $PK:KC=s:(1-s)$ とおくと

$\overrightarrow{AK}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AB}+ta\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK}=(1-s)\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AC}=(1-s)\cdot\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$




$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でなく，$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ であるから

$1-t=\dfrac{1}{6}(1-s),\ ta=s$

これから　$t=\dfrac{5}{6-a},\ 1-t=\dfrac{1-a}{6-a}$

よって　$\overrightarrow{AK}=\dfrac{{}^{\text{ウ}}1-a}{{}^{\text{エ}}6-{}^{\text{オ}}a}\overrightarrow{AB}+\dfrac{{}^{\text{カキ}}5a}{{}^{\text{ク}}6-{}^{\text{ケ}}a}\overrightarrow{AC}$

また，$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AK}$ とすると　$k\left(\dfrac{1-a}{6-a}+\dfrac{5a}{6-a}\right)=1$ から　$k=\dfrac{6-a}{4a+1}$

ゆえに　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{{}^{\text{コ}}1-{}^{\text{サ}}a}{{}^{\text{シ}}4a+{}^{\text{ス}}1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{{}^{\text{セソ}}5a}{{}^{\text{タ}}4a+{}^{\text{チ}}1}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{BQ}\perp\overrightarrow{CP}$ から　$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

(1) から　$\left(-\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0$

ゆえに　$-|\overrightarrow{AB}|^2+(a+6)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-6a|\overrightarrow{AC}|^2=0$ …… ①

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|\neq 0$ であるから　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|^2\cos\theta$

よって，① から　$(a+{}^{ツ}6)\cos\theta-({}^{テ}6a+{}^{ト}1)=0$

ゆえに　$\cos\theta=\frac{6a+1}{a+6}=6-\frac{35}{a+6}$

$0<a<1$ から　$\frac{35}{6}>\frac{35}{a+6}>5$　　よって　$6-\frac{35}{6}<\cos\theta<6-5$

ゆえに　$\frac{{}^{ナ}1}{{}^{ニ}6}<\cos\theta<1$

別解　(1) の $\overrightarrow{AK}$ と $\overrightarrow{AR}$ について

△ABQ と直線 PC に関して，メネラウスの定理から　$\frac{BK}{KQ}\cdot\frac{1-a}{1}\cdot\frac{1}{5}=1$

ゆえに　BK : KQ$=5:(1-a)$

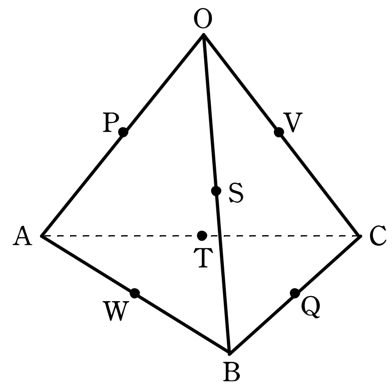
よって　$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5+(1-a)}\left\{(1-a)\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AQ}\right\}=\frac{1-a}{6-a}\overrightarrow{AB}+\frac{5a}{6-a}\overrightarrow{AC}$

△ABC と点 K に関して，チェバの定理から　$\frac{1}{5}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{1-a}{a}=1$

ゆえに　BR : RC$=5a:(1-a)$

よって　$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{5a+(1-a)}\left\{(1-a)\overrightarrow{AB}+5a\overrightarrow{AC}\right\}=\frac{1-a}{4a+1}\overrightarrow{AB}+\frac{5a}{4a+1}\overrightarrow{AC}$

14 (1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}\overrightarrow{OA}+\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}\overrightarrow{OB}+\frac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}\overrightarrow{OC}$




(2)　$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{{}^{キ}1}{{}^{ク}4}AB^2+\frac{{}^{ケ}1}{{}^{コ}4}OC^2$

(3)　$\overrightarrow{VW}=\overrightarrow{VO}+\overrightarrow{OW}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

よって　$\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{VW}=-\frac{1}{4}BC^2+\frac{1}{4}OA^2$, $\overrightarrow{VW}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}CA^2+\frac{1}{4}OB^2$

ゆえに　$-\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{4}OC^2=6$ から　$-AB^2+OC^2=24$ …… ①

同様にして　$-BC^2+OA^2=32$ …… ②，$-CA^2+OB^2=36$ …… ③

$AB=5$ であるから，① より　$OC={}^{サ}7$

$BC=7$, $CA=8$ であるから，②, ③ より　$OA=9$, $OB=10$

よって，余弦定理により　$\cos\angle AOB=\frac{9^2+10^2-5^2}{2\cdot 9\cdot 10}=\frac{{}^{シス}13}{{}^{セソ}15}$

15　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}-\frac{4}{7}\vec{a}=\frac{{}^{アイ}-4}{{}^{ウ}7}\vec{a}+\frac{{}^{エ}3}{{}^{オ}8}\vec{b}+\frac{{}^{カ}5}{{}^{キ}8}\vec{c}$

$\overrightarrow{AS}=t\overrightarrow{AR}$ とすると

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AR}=\vec{a}+t(\overrightarrow{OR}-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}-\vec{a}\right)$

$=\vec{a}+t\left(\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}-\vec{a}\right)=\left(1-\frac{5}{7}t\right)\vec{a}+\frac{3t}{16}\vec{b}+\frac{5t}{16}\vec{c}$

点 S は △OBC の定める平面上にあるから　$1-\frac{5}{7}t=0$

よって　　$t=\frac{7}{5}$

ゆえに　　$5\overrightarrow{AS}=7\overrightarrow{AR}$

したがって　AR : AS$={}^{\text{ク}}5:{}^{\text{ケ}}7$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 60^\circ=\dfrac{|\vec{a}|^2}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\frac{3}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{3}{16}|\vec{a}|^2+\frac{5}{16}|\vec{a}|^2=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\left|\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}\right|^2=\dfrac{9}{64}|\vec{a}|^2+\dfrac{30}{64}\cdot\dfrac{|\vec{a}|^2}{2}+\dfrac{25}{64}|\vec{a}|^2=\dfrac{49}{64}|\vec{a}|^2$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{7}{8}|\vec{a}|$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot\frac{7}{8}|\vec{a}|}=\dfrac{{}^{\text{コ}}4}{{}^{\text{サ}}7}$

参考　△OAQ は OQ＝AQ の二等辺三角形である.

よって　$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{OA}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{7}$

$\boxed{16}$ (1)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$ の両辺を平方すると　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ を代入して　$1^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=1$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}2}$

また　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\cdot1^2+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1^2=3$

$|2\vec{a}+\vec{b}|>0$ であるから　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{{}^{\text{エ}}3}$

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1^2=0$$

よって，$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$ であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は ${}^{\text{オカ}}90^\circ$

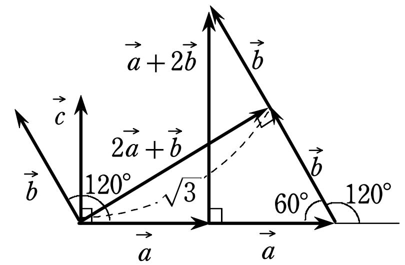
(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の大きさはどれも 1 で等しい。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\theta=120^\circ$

$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるから，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は鋭角である。

また　$\vec{c}\perp\vec{a}$

よって，右図のようになるから，$\vec{a}+2\vec{b}$ を考えると，このベクトルと $\vec{c}$ の向きは同じになる。




また，$\vec{a}+2\vec{b}$ の大きさは $2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさと等しく　$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3}$

よって　$\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}+2\vec{b})=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{キ}}3}}{{}^{\text{ク}}3}(\vec{a}+{}^{\text{ケ}}2\vec{b})$

別解　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ ($s$，$t$ は実数) とおく。

$|\vec{c}|=1$ から　$|s\vec{a}+t\vec{b}|=1$

両辺を平方すると　$s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$s^2-st+t^2=1$　…… ①

$\vec{c}\perp\vec{a}$ より $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$s-\dfrac{1}{2}t=0$　　よって　$t=2s$　…… ②

② を ① に代入して　$s^2-s\cdot(2s)+(2s)^2=1$

ゆえに　$s^2=\dfrac{1}{3}$　　よって　$s=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

② から　$s=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，　$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ から　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2>0$

$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$-\dfrac{1}{2}s+t>0$　　よって　$s<2t$　…… ③

$s=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ は ③ を満たすが，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$t=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ は ③ を満たさない。

したがって　$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{a}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\vec{b}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{キ}}3}}{{}^{\text{ク}}3}(\vec{a}+{}^{\text{ケ}}2\vec{b})$

(3)　$\vec{c}\perp\vec{a}$ から　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

また，(2) の図より $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は 30° であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\vec{p}\cdot\vec{a}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{a}=x|\vec{a}|^2+y\vec{c}\cdot\vec{a}=x$

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{b}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

したがって，$\vec{p}$ が $0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq1$，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{b}\leqq1$ を満たすための必要十分条件は

$0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \leqq 1$

すなわち　${}^{\text{コ}}0 \leqq x \leqq {}^{\text{サ}}1,\ x \leqq \sqrt{{}^{\text{シ}}3}\,y \leqq x+{}^{\text{ス}}2$　……④

また　$\vec{p}\cdot\vec{c}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{c}=x\vec{c}\cdot\vec{a}+y|\vec{c}|^2=y$

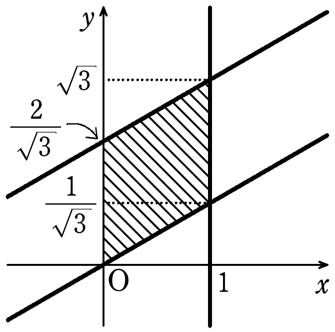
④を満たす$(x,\ y)$を座標平面上に図示すると，右図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。

よって，$y$は$x=1$のとき最大値$\sqrt{3}$をとるから，

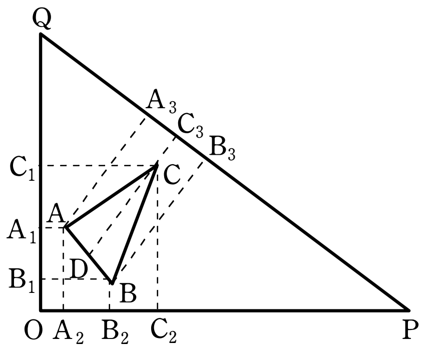
$\vec{p}\cdot\vec{c}$の最大値は　$\sqrt{{}^{\text{セ}}3}$

このとき　$\vec{p}=\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{c}=\vec{a}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

$={}^{\text{ソ}}2\vec{a}+{}^{\text{タ}}2\vec{b}$




$\boxed{17}$




$A_1$が線分$B_1C_1$の中点であるから　$w={}^{\text{ア}}-y$

$B_2$が線分$A_2C_2$の中点であるから　$z={}^{\text{イ}}2x$

$AA_3 /\!/ BB_3$であり，Dは線分ABの中点，$C_3$は線分$A_3B_3$の中点であるから

$DC_3 /\!/ AA_3$

$AA_3 \perp PQ$であるから　$DC_3 \perp PQ$

よって　$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}={}^{\text{ウ}}0$　……①

また　$\overrightarrow{PQ}=(0-4,\ 3-0)=({}^{\text{エオ}}-4,\ {}^{\text{カ}}3)$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}2}(\overrightarrow{AB}-{}^{\text{ケ}}2\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\{(x,\ y)-2(2x,\ -y)\}$

$=\frac{1}{2}(-3x,\ 3y)$

ゆえに，①から　$\frac{1}{2}\{(-3x)\cdot(-4)+3y\cdot3\}=0$

よって　$y=\frac{{}^{\text{コサ}}-4}{{}^{\text{シ}}3}x$

したがって　$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)=\left(x,\ -\frac{4}{3}x\right)=x\left(1,\ -\frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC}=(2x,\ -y)=\left(2x,\ \frac{4}{3}x\right)=x\left(2,\ \frac{{}^{\text{ス}}4}{{}^{\text{セ}}3}\right)$

$x>0$であるから

$AB=|\overrightarrow{AB}|=x\sqrt{1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}x$　……②

$AC=|\overrightarrow{AC}|=x\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}x$　……③

②から　$x=\frac{3}{5}AB$

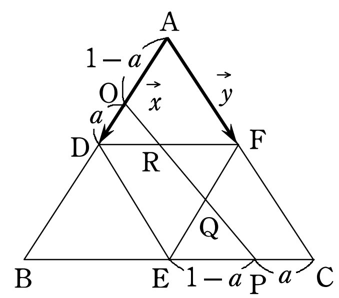
③に代入して　$AC=\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{3}{5}AB=\frac{{}^{\text{ソ}}2\sqrt{{}^{\text{タチ}}13}}{{}^{\text{ツ}}5}AB$

また　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x^2\left\{1\cdot2+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}\right\}=\frac{2}{9}x^2$

よって　$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{5}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3}x}=\frac{1}{5\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{{}^{\text{テト}}13}}{{}^{\text{ナニ}}65}$

$\boxed{18}$ (1)　$|\vec{x}|=|\vec{y}|={}^{\text{ア}}1$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos60^\circ=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}2}$




(2)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$

ここで

$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-(1-a)\vec{x}=(a-1)\vec{x}$

$\overrightarrow{AC}=2\vec{y}$

$\overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{CE}=a\overrightarrow{FD}=a(\vec{x}-\vec{y})$

よって　$\overrightarrow{OP}=(a-1)\vec{x}+2\vec{y}+a(\vec{x}-\vec{y})=({}^{\text{エオ}}2a-{}^{\text{カ}}1)\vec{x}+({}^{\text{キ}}2-{}^{\text{ク}}a)\vec{y}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(2a-1)^2|\vec{x}|^2+2(2a-1)(2-a)\vec{x}\cdot\vec{y}+(2-a)^2|\vec{y}|^2$

$=(2a-1)^2\cdot 1^2+2(2a-1)(2-a)\cdot\dfrac{1}{2}+(2-a)^2\cdot 1^2$

$=3a^2-3a+3={}^{\text{ケ}}3(a^{{}^{\text{コ}}2}-{}^{\text{サ}}a+{}^{\text{シ}}1)$

(3)　$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とすると

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{AO}+k\overrightarrow{OP}=(1-a)\vec{x}+k\{(2a-1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}\}$

$=\{k(2a-1)+1-a\}\vec{x}+k(2-a)\vec{y}$　…… ①

$\mathrm{EQ}:\mathrm{QF}=(1-s):s$ とすると

$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AF}=s(\vec{x}+\vec{y})+(1-s)\vec{y}=s\vec{x}+\vec{y}$　…… ②

$\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{y}\neq\vec{0}$，$\vec{x}\nparallel\vec{y}$ であるから，①，② より　$k(2a-1)+1-a=s$，$k(2-a)=1$

よって　$k=\dfrac{1}{2-a}$　$\left(s=\dfrac{a^2-a+1}{2-a}\right)$

したがって　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セ}}2-{}^{\text{ソ}}a}\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OR}=m\overrightarrow{OP}$ とすると

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OR}=(1-a)\vec{x}+m\{(2a-1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}\}$

$=\{m(2a-1)+1-a\}\vec{x}+m(2-a)\vec{y}$

R は線分 DF 上にあるから　$\{m(2a-1)+1-a\}+m(2-a)=1$

整理して　$m(a+1)=a$

よって　$m=\dfrac{a}{a+1}$

したがって　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{{}^{\text{タ}}a}{{}^{\text{チ}}a+{}^{\text{ツ}}1}\overrightarrow{OP}$

$\left(\text{または}\quad \overrightarrow{OR}=\dfrac{{}^{\text{タ}}a}{{}^{\text{チ}}1+{}^{\text{ツ}}a}\overrightarrow{OP}\right)$

別解　P を通り AB に平行な直線と AC との交点を G とする。OA∥QF∥PG であるから

$\mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=\mathrm{AF}:\mathrm{FG}=1:(1-a)$

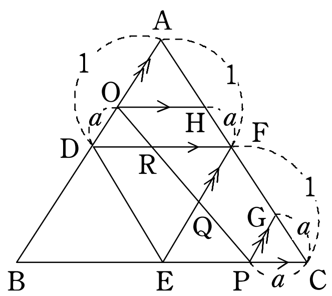
したがって

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{1+(1-a)}\overrightarrow{OP}=\dfrac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セ}}2-{}^{\text{ソ}}a}\overrightarrow{OP}$

O を通り BC に平行な直線と AC との交点を H とする。OH∥RF∥PC であるから

$\mathrm{OR}:\mathrm{RP}=\mathrm{HF}:\mathrm{FC}=a:1$

よって　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{{}^{\text{タ}}a}{{}^{\text{チ}}a+{}^{\text{ツ}}1}\overrightarrow{OP}$




(4)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\{(2a-1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}\}\cdot(a+1)\vec{x}=(2a-1)(a+1)|\vec{x}|^2+(2-a)(a+1)\vec{x}\cdot\vec{y}$

$=2a^2+a-1+\dfrac{1}{2}(-a^2+a+2)=\dfrac{3}{2}a(a+1)$

したがって　$\cos^2\theta=\dfrac{(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}=\dfrac{\frac{9}{4}a^2(a+1)^2}{3(a^2-a+1)\cdot(a+1)^2}=\dfrac{{}^{\text{テ}}3a^2}{{}^{\text{ト}}4(a^2-a+1)}$

$\theta=45^\circ$ のとき，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{3a^2}{4(a^2-a+1)}=\dfrac{1}{2}$

よって　$3a^2=2(a^2-a+1)$

整理して　$a^2+2a-2=0$

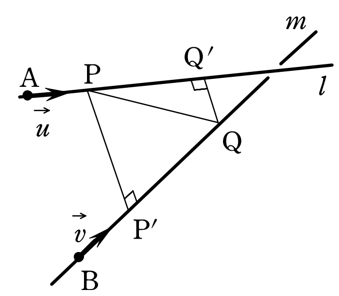
これを解くと　$a=-1\pm\sqrt{3}$

$0<a<1$ であるから　$a={}^{\text{ナニ}}-1+\sqrt{{}^{\text{ヌ}}3}$

19 (1)　A，P，Q′ は $l$ 上の点，B，P′，Q は $m$ 上の点であるから，実数 $t$，$t'$，$s$，$s'$ により

$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$，$\overrightarrow{BP'}=t'\vec{v}$，$\overrightarrow{BQ}=s\vec{v}$，$\overrightarrow{AQ'}=s'\vec{u}$

と表される．




$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}=(t,\ t,\ 0)$ であるから，点 P の座標は

$\mathrm{P}(t,\ t,\ 0)$

$\overrightarrow{BP'}=t'\vec{v}=(t',\ 0,\ t')$ であるから，点 P′ の座標は

$\mathrm{P'}(t',\ 5,\ t'-2)$

$\overrightarrow{BQ}=s\vec{v}=(s,\ 0,\ s)$ であるから，点 Q の座標は　$\mathrm{Q}(s,\ 5,\ s-2)$

$\overrightarrow{AQ'}=s'\vec{u}=(s',\ s',\ 0)$ であるから，点 Q′ の座標は　$\mathrm{Q'}(s',\ s',\ 0)$

直線 PP′ と直線 $m$ が直交するから　$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{v}=0$

ここで，$\overrightarrow{PP'}=(t'-t,\ 5-t,\ t'-2)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ であるから

$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{v}=(t'-t)\cdot1+(5-t)\cdot0+(t'-2)\cdot1=0$

よって　$t'={}^{\text{ア}}1+\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}2}t$　…… (A)

このとき　$\overrightarrow{PP'}=\left(1+\dfrac{1}{2}t-t,\ 5-t,\ 1+\dfrac{1}{2}t-2\right)$

$=\left({}^{\text{エ}}1-\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}t,\ {}^{\text{キ}}5-t,\ {}^{\text{クケ}}-1+\dfrac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サ}}2}t\right)$

同様に，直線 QQ′ と直線 $l$ が直交するから　$\overrightarrow{QQ'}\cdot\vec{u}=0$

ここで，$\overrightarrow{QQ'}=(s'-s,\ s'-5,\ -s+2)$，$\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$ であるから

$\overrightarrow{QQ'}\cdot\vec{u}=(s'-s)\cdot1+(s'-5)\cdot1+(-s+2)\cdot0=0$

よって　$s'=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s$　……(B)

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s-s,\ \dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s-5,\ -s+2\right)$

$$=\left(\frac{{}^{\text{シ}}5}{{}^{\text{ス}}2}-\frac{{}^{\text{セ}}1}{{}^{\text{ソ}}2}s,\ \frac{{}^{\text{タチ}}-5}{{}^{\text{ツ}}2}+\frac{{}^{\text{テ}}1}{{}^{\text{ト}}2}s,\ {}^{\text{ナ}}2-s\right)$$

(2)　三平方の定理により，$\mathrm{PP'}^2+\mathrm{QP'}^2=\mathrm{PQ}^2$，$\mathrm{QQ'}^2+\mathrm{PQ'}^2=\mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{PP'}^2+\mathrm{QP'}^2=\mathrm{QQ'}^2+\mathrm{PQ'}^2$$

よって，$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$ であるための条件は　　$\mathrm{QP'}=\mathrm{PQ'}$

このとき　　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QP'}}\right|$

また　$\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s'-t)\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=\overrightarrow{\mathrm{BP'}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(t'-s)\vec{v}$

$|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{2}$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QP'}}\right|$ のとき　$|s'-t|=|t'-s|$

(A)，(B) を代入すると　$\left|\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s-t\right|=\left|1+\dfrac{1}{2}t-s\right|$

よって　　$\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s-t=-\left(1+\dfrac{1}{2}t-s\right)$　または　$\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s-t=1+\dfrac{1}{2}t-s$

ゆえに　　$s={}^{\text{ニ}}7-t$ ……①　または　$s={}^{\text{ヌネ}}-1+t$ ……②

(3)　① が成り立つとき　$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\left(1-\dfrac{1}{2}t,\ 5-t,\ -1+\dfrac{1}{2}t\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(7-t),\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(7-t),\ 2-(7-t)\right)$$

$$=\left(-1+\frac{1}{2}t,\ 1-\frac{1}{2}t,\ -5+t\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=0$ から　$\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\left(-1+\dfrac{1}{2}t\right)+(5-t)\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)+\left(-1+\dfrac{1}{2}t\right)(-5+t)=0$

整理すると　$t^2-8t+12=0$　　すなわち　$(t-2)(t-6)=0$

よって　$t={}^{\text{ノ}}2,\ {}^{\text{ハ}}6$（または $t={}^{\text{ノ}}6,\ {}^{\text{ハ}}2$）

また，② が成り立つとき　$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\left(1-\dfrac{1}{2}t,\ 5-t,\ -1+\dfrac{1}{2}t\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(-1+t),\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(-1+t),\ 2-(-1+t)\right)$$

$$=\left(3-\frac{1}{2}t,\ -3+\frac{1}{2}t,\ 3-t\right)$$

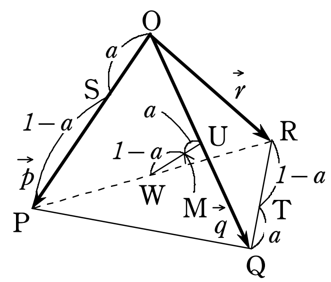
$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=0$ から　$\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\left(3-\dfrac{1}{2}t\right)+(5-t)\left(-3+\dfrac{1}{2}t\right)+\left(-1+\dfrac{1}{2}t\right)(3-t)=0$

整理すると　$t^2-8t+20=0$

この方程式の判別式 $D$ について　$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot20=-4<0$

よって，条件を満たす実数 $t$ は存在しない．

$\boxed{20}$ (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}={}^{\text{ア}}a\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=({}^{\text{イ}}1-{}^{\text{ウ}}a)\vec{q}+{}^{\text{エ}}a\vec{r}$




また　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=a\overrightarrow{\mathrm{OW}}+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OU}}$

$$=a\cdot\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{r})+(1-a)\cdot\frac{1}{2}\vec{q}$$

$$=\frac{1}{{}^{\text{オ}}2}\left\{{}^{\text{カ}}a\vec{p}+({}^{\text{キ}}1-{}^{\text{ク}}a)\vec{q}+{}^{\text{ケ}}a\vec{r}\right\}$$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\left[a\vec{p}+\left\{(1-a)\vec{q}+a\vec{r}\right\}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}\right)$$

よって，M は線分 ST の中点であるから　$\mathrm{SM}:\mathrm{ST}=\dfrac{1}{2}:1=1:{}^{\text{ニ}}2$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{k}{2}\left\{a\vec{p}+(1-a)\vec{q}+a\vec{r}\right\}$

N は平面 PQR 上にあるから　$\dfrac{k}{2}a+\dfrac{k}{2}(1-a)+\dfrac{k}{2}a=1$

よって　$\dfrac{k}{2}(a+1)=1$　　　$a+1\neq0$ であるから　$k=\dfrac{2}{a+1}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}a+{}^{\text{ス}}1}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$　$\left(\text{または }\dfrac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}1+{}^{\text{ス}}a}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2}{a+1}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{a+1}\left\{a\vec{p}+(1-a)\vec{q}+a\vec{r}\right\}$

N と G が一致しているとき　$\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{a+1}$，$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1-a}{a+1}$，$\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{a+1}$

これを解くと　　$a=\dfrac{{}^{\text{セ}}1}{{}^{\text{ソ}}2}$

(2)　条件から　$|\vec{p}|=|\vec{q}|=\sqrt{2}$，$|\vec{r}|=1$，$\vec{p}\cdot\vec{r}=0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{q}-\vec{p})$

$$=\frac{1}{3}\left\{(\vec{q}+\vec{p})\cdot(\vec{q}-\vec{p})+\vec{r}\cdot\vec{q}-\vec{r}\cdot\vec{p}\right\}=\frac{1}{3}\left(|\vec{q}|^2-|\vec{p}|^2+\vec{q}\cdot\vec{r}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(2-2+\vec{q}\cdot\vec{r})=\frac{1}{3}\vec{q}\cdot\vec{r}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから　$\vec{q}\cdot\vec{r}={}^{\text{タ}}0$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{r}-\vec{q})$

$=\dfrac{1}{3}\{\vec{p}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{q}+(\vec{r}+\vec{q})\cdot(\vec{r}-\vec{q})\}=\dfrac{1}{3}(-\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{r}|^2-|\vec{q}|^2)$

$=\dfrac{1}{3}(-\vec{p}\cdot\vec{q}+1-2)=\dfrac{1}{3}(-\vec{p}\cdot\vec{q}-1)$

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ であるから　$\vec{p}\cdot\vec{q}=^{チツ}-1$

よって　$\cos\angle POQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle POQ<180°$ であるから　$\angle POQ=^{テトナ}120°$

また　$OG^2=|\overrightarrow{OG}|^2=\dfrac{1}{9}|\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}|^2=\dfrac{1}{9}(|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+2\vec{q}\cdot\vec{r}+2\vec{r}\cdot\vec{p})$

$=\dfrac{1}{9}\{2+2+1+2\cdot(-1)\}=\dfrac{1}{3}$

$OG>0$ であるから　$OG=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{^{ニ}3}}{^{ヌ}3}$