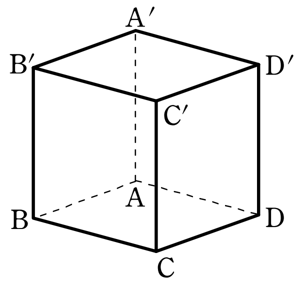
1 一辺の長さが1の，図のような立方体 ABCD－A′B′C′D′ において，AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{y}$，$\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$ とおく．ただし，$0<a<1$ とする．



(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\right)\vec{x}+\vec{y}+\boxed{\text{ウ}}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{PR}=\boxed{\text{エオ}}\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

となる．したがって，$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:\boxed{\text{カ}}$，

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\boxed{\text{キ}}\left(a^2-a+\boxed{\text{ク}}\right)$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2-a+\boxed{\text{ケ}}$ であるから，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角は $\boxed{\text{コサ}}^\circ$ である．

(2) 三角形 PQR の重心を G とすると $\overrightarrow{DG}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$ である．

（$\boxed{\text{シ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ は解答の順序を問わない．）

いま，辺 C′D′ 上に SQ＝SR となるように点 S をとる．このとき，

$\overrightarrow{C'S}=\boxed{\text{ソ}}\overrightarrow{C'D'}$ となり，$\overrightarrow{SD}=\left(\boxed{\text{タ}}-\boxed{\text{チ}}\right)\vec{x}-\vec{z}$ である．

(3) $\overrightarrow{SG}$ と $\overrightarrow{DG}$ が垂直であるとき，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり，$\angle QSR=\boxed{\text{トナニ}}^\circ$

となる．

2 平面上に異なる2定点 M，N をとり，線分 MN の中点を O とする．さらに，この平面上に，等式 $|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{ON}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OM}|$ を満たす動点 X を考える．

(1) このとき，$|\overrightarrow{OX}|^2-\boxed{\text{ア}}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OX}+|\overrightarrow{OM}|^2=0$ であるから，これを満たす点 X 全体の描く図形は半径 $\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}|\overrightarrow{OM}|$ の円であり，その中心を A とすると き，$\overrightarrow{OA}=\boxed{\text{エ}}\overrightarrow{OM}$ である．

(2) $|\overrightarrow{OM}|=1$ とする．いま，この平面上に点 P を PN＝5，PA＝3 となるようにとる．次に線分 QR を (1) で求めた円の直径とする．二つのベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{NR}$ の内積が最小となるような QR の位置を求めよう．

まず，$|\overrightarrow{AN}|=\boxed{\text{オ}}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AN}=\boxed{\text{カ}}$ である．

内積 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NR}$ をベクトル $\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{PN}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NR}=\boxed{\text{キ}}$ となる．ただし，$\boxed{\text{キ}}$ には，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ．

⓪ $-\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PN}-|\overrightarrow{AR}|^2$　① $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PN}+|\overrightarrow{AR}|^2$　② $-\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PN}+|\overrightarrow{AR}|^2$

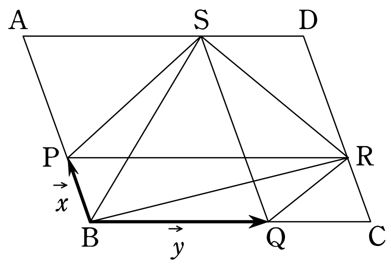
③ $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PN}-|\overrightarrow{AR}|^2$　④ 0

したがって，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NR}$ が最小となるのは，ベクトル $\overrightarrow{AR}$ と $\overrightarrow{PN}$ のなす角が $\boxed{\text{ク}}$ のときで，その最小値は $-\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コサ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ク}}$ には，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ．

⓪ 0°　① 45°　② 60°　③ 90°　④ 120°　⑤ 180°

センター過去問⑨（ベクトル）　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

3 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする．辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR∥BC，SQ∥AB となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく．



(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\vec{x}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{y},\qquad \overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\vec{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{y}$$

となる．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする．

このとき，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\vec{x}|^2=-\dfrac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\vec{y}|^2$ である．

(3)　RQ∥SB および SP∥RB が成り立つとする．このとき，

$$a=\frac{\boxed{\text{セソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

(4)　(2) と (3) の条件が同時に成り立つとき，$\dfrac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=\boxed{\text{ナ}}$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\frac{\boxed{\text{ニ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

を得る．

4 平面上の 3 点 O，A，B が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ を満たしているとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である．したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ となる．

(2)　三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

また，O から辺 AB に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(3)　点 P が平面上を $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たしながら動くとき，三角形 PAB の面積 S の最大値を求めよう．

P から AB に下ろした垂線の長さの最大値は $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\left(1+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}\right)$ である

から，S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+2\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

センター過去問⑨（ベクトル）　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

5 四面体の四つの頂点を，O，L，M，N とする．線分 OL を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 MN の中点を Q とする．a と b を 1 より小さい正の実数とする．線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とし，線分 LM を $b:(1-b)$ に内分する点を S とする．

$\vec{l}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{m}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく．

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\right)\vec{l}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{m}-\boxed{\text{エ}}\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{l}-\boxed{\text{キ}}\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{m}+\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\right)\vec{n}$$

が成立する．

(2) 以下 $\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ の場合を考える．

点 S が 3 点 P，Q，R の定める平面上にあるとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は実数 x と y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=x\overrightarrow{\mathrm{RP}}+y\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$$

と表せる．これより

$$x=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(1-b),\quad y=\boxed{\text{ソ}}\,b$$

となり，a と b は

$$\boxed{\text{タチ}}+\boxed{\text{ツ}}-\boxed{\text{テト}}=0$$

を満たすことがわかる．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が垂直になるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

のときであり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ の内積は

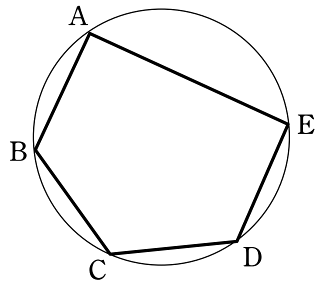
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

となる．

6 五角形 ABCDE は，半径 1 の円に内接し

$$\angle\mathrm{EAD}=30^\circ,\ \angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CDA}=60^\circ$$

を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}$ とおく．



(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{b}$$

である．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ との内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ケ}}$$

であり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である．

(2) ∠CAD の 2 等分線と線分 CD との交点を P とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\boxed{\text{サ}}-\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\right)\vec{a}+\left(\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}\right)\vec{b}$$

であり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\boxed{\text{ソタ}}-\boxed{\text{チツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である．

さらに，線分 AP と線分 CE との交点を Q とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

である．

センター過去問⑨（ベクトル）　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{7}$ 紙片の上に図1のようなひし形 $\mathrm{ABCD_0}$ があり，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2$ とする．また，線分 AC の中点を O とする．この紙片を，図2のように空間の中で，AC に沿って 60° だけ折り曲げ，点 $\mathrm{D_0}$ の新しい位置を D とする．

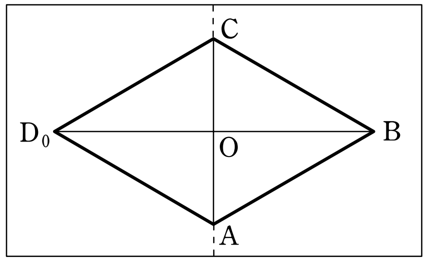


図1

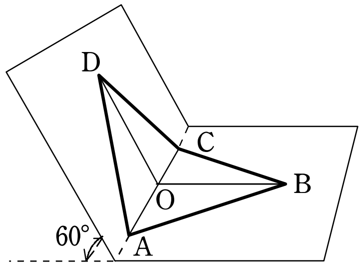


図2

(1) このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ についての内積を求めると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{ア}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{\text{イ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$ となる．

(2) a を $0<a<1$ を満たす数とし，線分 BD を $a:(1-a)$ の比に内分する点 P をとる．

このとき $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{\text{ク}}\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\boxed{\text{サ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\left(\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$ である．

したがって $$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\boxed{\text{ソ}}\,a^2-\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}$$ となる．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が直交するのは $$a=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\ \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$ のときである．

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right.$ と $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ は解答の順序を問わない．$\left.\right)$

$\boxed{8}$ 各辺の長さが1である正四面体 OABC において，線分 AB の中点を P，線分 OB を $2:1$ に内分する点を Q，線分 OC を $1:3$ に内分する点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

(1) 次の内積を計算すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

であり，さらに

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

を得る．したがって，$\angle\mathrm{QPR}=\theta$ とするとき

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

となる．

$\boxed{9}$ a を正の実数とする．三角形 ABC の内部の点 P が $5\overrightarrow{PA}+a\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとする．このとき $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{a+\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{a+\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{AC}$ が成り立つ．

直線 AP と辺 BC との交点 D が辺 BC を 1 : 8 に内分するならば，$a=\boxed{\text{オ}}$ となり，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\overrightarrow{AD}$ となる．このとき，点 P は線分 AD を $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ に内分する．さらに，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$ ならば $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{\text{サ}}$ である．したがって $|\overrightarrow{AP}|^2=\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ となる．

$\boxed{10}$ 実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ …… ① が $x=2$ を解にもつとする．このとき

$c=-\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}}b-\boxed{\text{ウ}}$ であり

$x^3+ax^2+bx+c=(x-2)\left\{x^2+\left(a+\boxed{\text{エ}}\right)x+\boxed{\text{オ}}a+b+\boxed{\text{カ}}\right\}$ となる．

① の解を 2，α，β とし，複素数平面において 3 点 2，α，β が正方形の異なる三つの頂点になっているとする．さらに，この正方形の一辺の長さが $5\sqrt{2}$ で，α，β の実部が負であるならば，α，β は $\boxed{\text{キク}}\pm\boxed{\text{ケ}}i$ である．

このとき $a=\boxed{\text{コ}}$，$b=\boxed{\text{サシ}}$，$c=\boxed{\text{スセソ}}$ となる．

センター過去問⑨（ベクトル）　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

11 四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{CO}|=2$，$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=3$，$\angle OCA=\angle OCB=60^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$ とする．

(1) 次の内積を求めると

$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=\boxed{\text{ア}},$$

$$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{イウ}},$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\boxed{\text{エ}}$$ となる．

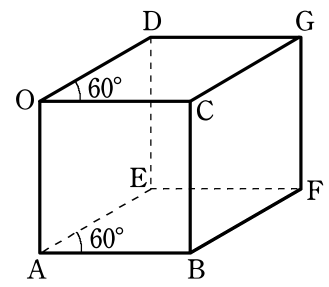
また $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である．

(2) 辺ABの中点をMとすると $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}=\boxed{\text{ク}}$ である．

さらに，線分CM上に点Pをとり，$\overrightarrow{CP}=t\,\overrightarrow{CM}\ (0<t<1)$ とすると，

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{CM}$ が直交するのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ のときである．

12 次の図のように向かい合う面が平行である六面体OABC−DEFGがある．ただし，面OABC, CBFGは一辺の長さが1の正方形であり，面OCGDは$\angle COD=60^\circ$のひし形である．



このとき　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{ア}}$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$ である．

aを$0<a<1$を満たす数とする．線分EBを2 : 1に内分する点をP，線分GEを$a:(1-a)$に内分する点をQとすると

$$\overrightarrow{PG}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OC}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(a-1)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)\overrightarrow{OC}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OD}$$ である．

線分PQの長さは，$a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる．

$\boxed{13}$ a は $0<a<1$ を満たす数とする．辺AB, ACの長さが等しい二等辺三角形ABCに対し，辺ABを $1:5$ に内分する点をP，辺ACを $a:(1-a)$ に内分する点をQとする．また，線分BQと線分CPの交点をKとし，直線AKと辺BCの交点をRとする．

(1)　$\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{AB}+\boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{CP}=\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AK}=\frac{\boxed{\text{ウ}}-a}{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\,a+\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{AC}$$

である．

(2)　$\angle BAC=\theta$ とおく．$\overrightarrow{BQ}$ と $\overrightarrow{CP}$ が垂直であるとき，$\cos\theta$ の満たす条件を求めよう．

このとき，a は $\left(a+\boxed{\text{ツ}}\right)\cos\theta-\left(\boxed{\text{テ}}\,a+\boxed{\text{ト}}\right)=0$ を満たす．したがって，求める条件は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}<\cos\theta<1$ である．

$\boxed{14}$ 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をP，辺BCの中点をQ，辺OBの中点をS，辺CAの中点をT，辺OCの中点をV，辺ABの中点をWとする．

(1)　$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OC}$ である．

(2)　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}=-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}AB^2+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}OC^2$ である．

(3)　$AB=5, BC=7, CA=8, \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}=6,\ \overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{VW}=8, \overrightarrow{VW}\cdot\overrightarrow{PQ}=9$ のとき

$OC=\boxed{\text{サ}}$, $\cos\angle AOB=\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である．

15 正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 4 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 5 : 3 に内分する点を Q とする．

そのとき，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{c}$ である．

線分 PQ の中点を R とし，直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする．

そのとき，AR : AS$=\boxed{\text{ク}}:\boxed{\text{ケ}}$ である．また，$\cos\angle AOQ=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

16 平面上の三つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=1$$

を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるとする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，

$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

(2) ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと $\vec{c}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{b}\right)$ である。

(3) x，y を実数とする。ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$ が

$$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq1,\quad 0\leqq\vec{p}\cdot\vec{b}\leqq1$$

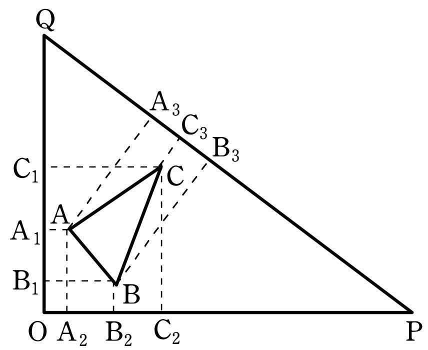
を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\text{コ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{サ}},\quad x\leqq\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,y\leqq x+\boxed{\text{ス}}$$

である。x と y が上の範囲を動くとき，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ をとり，この最大値をとるときの $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと $\vec{p}=\boxed{\text{ソ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{タ}}\,\vec{b}$ である。

センター過去問⑨（ベクトル）　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

17 座標平面上の 3 点 O (0, 0), P (4, 0), Q (0, 3) を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A, B, C から直線 OQ に引いた垂線とOQ との交点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とする。A, B, C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とする。A, B, C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ A_3, B_3, C_3 とする。



A_1 が線分 B_1C_1 の中点であり，B_2 が線分 A_2C_2 の中点であり，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるとする。

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$ とおく。A_1 が線分 B_1C_1 の中点であるから $w=\boxed{\text{ア}}\,y$ である。B_2 が線分 A_2C_2 の中点であるから $z=\boxed{\text{イ}}\,x$ である。

線分 AB の中点を D とすると，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるから $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC}\right)$ であるから

$y=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,x$ である。

したがって $\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)$，$\overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{イ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$ である。

ゆえに $AC=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}AB$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

18 一辺の長さが 2 の正三角形 ABC の 3 辺 AB, BC, CA の中点をそれぞれ D, E, F とする。$0<a<1$ として，線分 AD を $(1-a):a$ に内分する点を O，線分 CE を $a:(1-a)$ に内分する点を P とし，直線 OP と直線 EF の交点を Q，直線 OP と直線 DF の交点を R とする。さらに，$\overrightarrow{AD}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{y}$ とおく。

(1) ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ は $|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP}=\left(\boxed{\text{エオ}}-\boxed{\text{カ}}\right)\vec{x}+\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)\vec{y}$$

と表される。$\overrightarrow{OP}$ の大きさの 2 乗は

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\boxed{\text{ケ}}\left(a^{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\right)$$

である。

(3) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OP}$ で表せば

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}+\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{OP}$$

である。（$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順序を問わない。）

(4) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とするとき

$$\cos^2\theta=\frac{\boxed{\text{テ}}\,a^2}{\boxed{\text{ト}}\left(a^{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\right)}$$

である。$\theta=45^\circ$ のとき，a の値は $a=\boxed{\text{ナニ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

19 点 A(0, 0, 0) を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$ に平行な直線を l とする．

また，点 B(0, 5, −2) を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ に平行な直線を m とする．l 上の点 P から m に下ろした垂線の足を P′ とする．また，m 上の点 Q から l に下ろした垂線の足を Q′ とする．

PP′＝QQ′ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ となる P と Q を求めよう．
「点 P から m に下ろした垂線の足」とは，点 P からひいた m の垂線と m との交点のことである．

(1) 実数 $t,\ t',\ s,\ s'$ により $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP'}}=t'\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}=s'\vec{u}$ と表される．

直線 PP′ と直線 m が直交するから $t'=\boxed{\text{ア}}+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t$ である．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ の成分を t を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t,\ \boxed{\text{キ}}-t,\ \boxed{\text{クケ}}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}t\right)$$

である．同様に直線 QQ′ と直線 l が直交するから $s'=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s$ である．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ の成分を s を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}s,\ \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}s,\ \boxed{\text{ナ}}-s\right)$$

である．

(2) さて，$\mathrm{PP'}^2+\mathrm{QP'}^2=\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QQ'}^2+\mathrm{PQ'}^2$ であるから，PP′＝QQ′ であるための条件は QP′＝PQ′ である．

$\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}=(s'-t)\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=(t'-s)\vec{v}$ であるから，PQ′＝QP′ となるのは

$s=\boxed{\text{ニ}}-t$ ……① または $s=\boxed{\text{ヌネ}}+t$ ……② のときである．

(3) ① が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ が垂直になるのは $t=\boxed{\text{ノ}}$ または $t=\boxed{\text{ハ}}$

のときである．（$\boxed{\text{ノ}}$ と $\boxed{\text{ハ}}$ は解答の順序は問わない．）

② が成り立つときは，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ が垂直になるような実数 t の値はない．

20 四面体 OPQR において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおく．

(1) $0<a<1$ として，線分 OP，QR を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ S，T とすると $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{r}$ である．

線分 OQ，PR の中点をそれぞれ U，W とし，線分 UW を $a:(1-a)$ に内分する点を M とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left\{\boxed{\text{カ}}\,\vec{p}+\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{r}\right\}$ である．

よって，M は線分 ST 上にあり SM：ST＝1：$\boxed{\text{コ}}$ である．

直線 OM が三角形 PQR と交わる点を N とする．

このとき $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ である．

（$\boxed{\text{シ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ は解答の順序を問わない．）

さらに，点 N が三角形 PQR の重心 G と一致しているとする．このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

である．

(2) 次に，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\sqrt{2}$，OR＝1，∠POR＝90° で，点 O と三角形 PQR の重心 G を通る直線 OG が三角形 PQR に垂直であるとき，∠POQ の大きさと線分 OG の長さを求めよう．

直線 OG が三角形 PQR に垂直であるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから $\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{タ}}$, $\vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{\text{チツ}}$ である．

よって ∠POQ＝$\boxed{\text{テトナ}}$°，$\mathrm{OG}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．