

1 [2003センター]

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} = \frac{5^2 + (4 + \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 5 \cdot (4 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{32 + 8\sqrt{3}}{10(4 + \sqrt{3})} = \frac{8(4 + \sqrt{3})}{10(4 + \sqrt{3})} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

このとき $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} AB \cdot CA \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (4 + \sqrt{3}) \cdot \frac{3}{5} = \frac{ウエ12 + オ3\sqrt{カ}3}{2}$

また、外接円の半径を R とすると、正弦定理により $2R = \frac{BC}{\sin A}$

よって $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{キ5\sqrt{ク}3}{ケ3}$

右の図において、 $AC \parallel DB$ であるから

$\angle BAC = \angle ABD$

また、 \widehat{BC} に対する円周角について

$\angle BAC = \angle BDC$

よって $\angle ABD = \angle BDC \dots\dots ①$

また、 \widehat{AC} に対する円周角について

$\angle ABC = \angle ADC \dots\dots ②$

①+② から $\angle ABD + \angle ABC = \angle BDC + \angle ADC$

すなわち $\angle CBD = \angle ADB$

したがって、台形 $ADBC$ は等脚台形である。

よって $CD = AB = 5$

B から辺 AC に垂線 BH を下ろすと

$AH = AB \cos A = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$

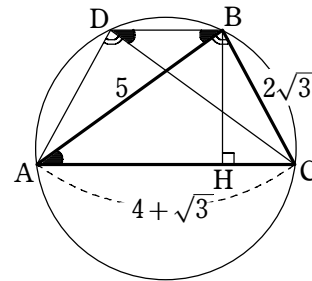
ゆえに $CH = AC - AH = (4 + \sqrt{3}) - 4 = \sqrt{3}$

よって $BD = AC - 2CH = (4 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = サ4 - \sqrt{シ}3$

また $BH = AB \sin A = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$

したがって、台形 $ADBC$ の面積は

$\frac{1}{2} (AC + BD) \cdot BH = \frac{1}{2} \{(4 + \sqrt{3}) + (4 - \sqrt{3})\} \cdot 3 = スセ12$



2 [2003センター]

(1) 1次関数 $y = Ax + B$ ($x \geq 0$) が常に $y > 0$ であれば
よいから $A \geq 0$ かつ $B > 0$

(2) ① を x について整理すると

$$\begin{aligned} &\{2\sin \alpha \cos \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\}x \\ &\quad + \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

よって $(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)x + \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha > 0$

これが、 $x \geq 0$ を満たすすべての x に対して成り立つ

条件は、(1) の結果から

$\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \geq 0 \dots\dots ②$ かつ $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha > 0 \dots\dots ③$

よって $\sin^ウ2\alpha \geq \cos^エ2\alpha$ かつ $\sin^オ2\alpha > \sin \alpha \cos \alpha$

② から $\sqrt{2} \sin(2\alpha - 45^\circ) \geq 0$

ここで、 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ であるから $-45^\circ \leq 2\alpha - 45^\circ \leq 315^\circ$

よって $0^\circ \leq 2\alpha - 45^\circ \leq 180^\circ$

ゆえに $\frac{45^\circ}{2} \leq \alpha \leq \frac{225^\circ}{2} \dots\dots ②'$

③ から $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) > 0$

$\sin \alpha \cdot \sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ) > 0$

ここで、 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ であるから $\sin \alpha \geq 0$, $-45^\circ \leq \alpha - 45^\circ \leq 135^\circ$

よって $\sin \alpha > 0$ かつ $\sin(\alpha - 45^\circ) > 0$

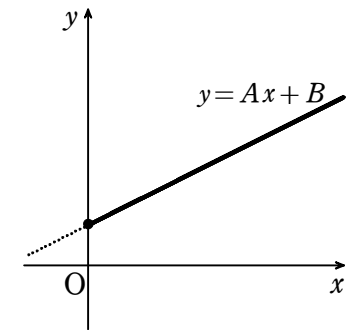
$\sin \alpha > 0$ から $0^\circ < \alpha < 180^\circ \dots\dots ④$

$\sin(\alpha - 45^\circ) > 0$ ($-45^\circ \leq \alpha - 45^\circ \leq 135^\circ$) から $0^\circ < \alpha - 45^\circ \leq 135^\circ$

よって $45^\circ < \alpha \leq 180^\circ \dots\dots ⑤$

④, ⑤ から $45^\circ < \alpha < 180^\circ \dots\dots ③'$

②', ③' から $カキ45^\circ < \alpha \leq \frac{クケコ225^\circ}{ケサ2}$



3 [2003センター]

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$

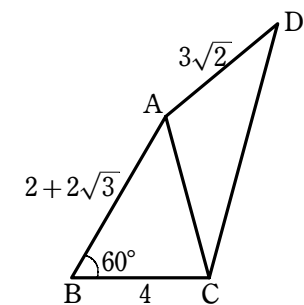
$= (2 + 2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2(2 + 2\sqrt{3}) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$

$= 24$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

また、 $\triangle ABC$ において、余弦定理により

$\cos \angle ACB = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2BC \cdot CA}$



$$= \frac{4^2 + (2\sqrt{6})^2 - (2 + 2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{24 - 8\sqrt{3}}{16\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}$$

さらに、 $\triangle ACD$ において、正弦定理により $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$

ここで、 $0^\circ < \angle ADC < 180^\circ$ であるから $\sin \angle ADC > 0$

$$\text{よって } \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{したがって } \sin \angle ACD = \frac{AD \sin \angle ADC}{AC} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

また、 $\triangle ACD$ の外接円の半径を R とすると $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2R$

$$\text{ゆえに } R = \frac{AC}{2\sin \angle ADC} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{2}$$

また、余弦定理により $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC$

$$CD = x \text{とおくと } (2\sqrt{6})^2 = x^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2x \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

整理すると $x^2 - 4\sqrt{3}x - 6 = 0$

$$\text{これを解くと } x = 2\sqrt{3} \pm 3\sqrt{2}$$

$x > 0$ であるから $x = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ よって $BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

また、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD \\ &= \frac{1}{2} (2 + 2\sqrt{3}) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 6 + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

4 [2003センター]

$0^\circ < C < 180^\circ$ であるから $\sin C > 0$

$$\text{よって } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

正弦定理により $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$$\text{ゆえに } \sin B = \frac{AC \sin C}{AB} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{AB}{\sin C} = 2R$

$$\text{よって } R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$$

また、余弦定理により $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$

$$BC = x \text{とおくと } (2\sqrt{3})^2 = x^2 + 3^2 - 2x \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

整理すると $x^2 - 2\sqrt{6}x - 3 = 0$

$$\text{これを解くと } x = \sqrt{6} \pm 3$$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{6} + 3$ ゆえに $BC = 3 + \sqrt{6}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} (3 + \sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$$

5 [2003センター]

(1) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より、 $0 < \sin \theta \leq 1$ であるから $0^\circ < 180^\circ \sin \theta \leq 180^\circ$

$$x = 180^\circ \sin \theta \text{とおくと } A = \cos x \sin x$$

$0^\circ < x \leq 180^\circ$ であるから $\sin x \geq 0$

よって、 $A > 0$ となるのは $\sin x > 0$ かつ $\cos x > 0$ のときである。

$\sin x > 0$ より $0^\circ < x < 180^\circ$

$\cos x > 0$ より $0^\circ < x < 90^\circ$

これらより $0^\circ < x < 90^\circ$

$$x = 180^\circ \sin \theta \text{であるから } 0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$$

これと、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ から $0^\circ < \theta < 30^\circ$ または $150^\circ < \theta < 180^\circ$

(2) $B = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin(180^\circ \sin \theta + 45^\circ)$

$$B > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{とすると } \sin(x + 45^\circ) > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$45^\circ < x + 45^\circ \leq 225^\circ$ であるから $60^\circ < x + 45^\circ < 120^\circ$

$$\text{すなわち } 60^\circ < 180^\circ \sin \theta + 45^\circ < 120^\circ \text{ ゆえに } \frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{5}{12}$$

(3) $|B| \leq 1$ より、 $-1 \leq B \leq 1$ であるから $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(x + 45^\circ) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$45^\circ < x + 45^\circ \leq 225^\circ$ であるから $135^\circ \leq x + 45^\circ \leq 225^\circ$

$$\text{すなわち } 135^\circ \leq 180^\circ \sin \theta + 45^\circ \leq 225^\circ \text{ ゆえに } \frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$

6 [2002センター]

△ABCにおいて、余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &\quad - 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

AC > 0 であるから AC = 3

0° < ∠ABC < 180° であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

正弦定理により $2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

よって $R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

△ACD = 3△ABC であるから $\triangle ACD = 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

また $\triangle ACD = \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin \angle ADC = \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin(180^\circ - \angle ABC)$
 $= \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin \angle ABC = \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8} AD \cdot CD$

したがって $AD \times CD = \frac{3\sqrt{15}}{4} \div \frac{\sqrt{15}}{8} = 6$

また、△ACDにおいて、余弦定理を用いると

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$$

よって $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cos(180^\circ - \angle ABC)$

ゆえに $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cdot (-\cos \angle ABC)$

すなわち $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4}$

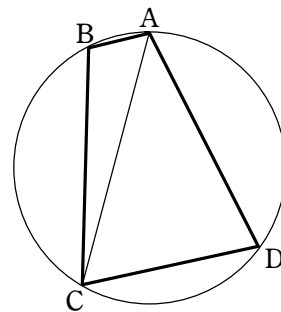
したがって $AD^2 + CD^2 = 12$

ここで $(AD + CD)^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD = 12 + 2 \cdot 6 = 24$

AD + CD > 0 であるから $AD + CD = 2\sqrt{6}$

よって、四角形 ABCD の周りの長さは

$$AB + BC + CD + AD = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$



7 [2002センター]

△ABCにおいて、余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &\quad - 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

AC > 0 であるから AC = 3

0° < ∠ABC < 180° であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

正弦定理により $2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

よって $R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

△ACD = 1/2 AD · CD sin ∠ADC = 1/2 AD · CD sin(180° - ∠ABC)

$$= \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin \angle ABC = \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8} AD \cdot CD$$

△ACD = 3△ABC であるから $\frac{\sqrt{15}}{8} AD \cdot CD = 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$

したがって $AD \times CD = 6$

また、△ACDにおいて、余弦定理を用いると

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$$

よって $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cos(180^\circ - \angle ABC)$

ゆえに $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cdot (-\cos \angle ABC)$

すなわち $9 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4}$

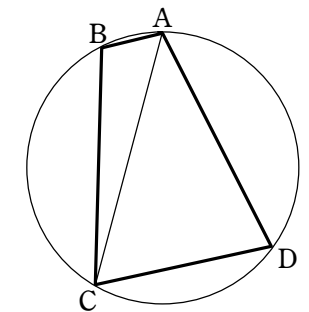
したがって $AD^2 + CD^2 = 12$

ここで $(AD + CD)^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD = 12 + 2 \cdot 6 = 24$

AD + CD > 0 であるから $AD + CD = 2\sqrt{6}$

よって、四角形 ABCD の周りの長さは

$$AB + BC + CD + AD = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$



8 [2002センター]

$$(1) \sin(a\theta) + \sqrt{3} \cos(a\theta) = 2 \left\{ \frac{1}{2} \sin(a\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(a\theta) \right\}$$

$$= 2 \{ \cos 60^\circ \sin(a\theta) + \sin 60^\circ \cos(a\theta) \}$$

$$= 2 \sin(a\theta + 60^\circ)$$

ゆえに $f(\theta) = 2 \sin(a\theta + 60^\circ)$

(2) $a > 0, \theta > 0^\circ$ であるから $a\theta + 60^\circ > 60^\circ$

$f(\theta) = 0$ となるのは $a\theta + 60^\circ = 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, 720^\circ, 900^\circ, \dots$

すなわち $a\theta = 120^\circ, 300^\circ, 480^\circ, 660^\circ, 840^\circ, \dots$ のとき.

ゆえに, 最小のものは $\frac{120^\circ}{a}$ であり, 4番目は $\frac{660^\circ}{a}$, 5番目は $\frac{840^\circ}{a}$

(3) (2) から, 求める条件は $\frac{660^\circ}{a} \leq 180^\circ$ かつ $\frac{840^\circ}{a} > 180^\circ$

ゆえに $\frac{11}{3} \leq a < \frac{14}{3}$

9 [2002センター]

$$1 + \tan^2 \angle DAO = \frac{1}{\cos^2 \angle DAO} \text{ から}$$

$$\cos^2 \angle DAO = \frac{1}{3}$$

$\triangle DAO$ において, $\angle DOA = 90^\circ$ であるから

$$0^\circ < \angle DAO < 90^\circ$$

よって $\cos \angle DAO > 0$

$$\text{ゆえに } \cos \angle DAO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって, 円 } O \text{ の半径は } OA = DA \cos \angle DAO = \frac{3\sqrt{55}}{11} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{165}}{11}$$

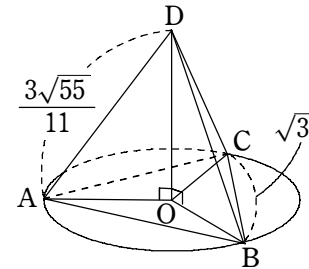
$\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos \angle AOB$$

$$= \left(\frac{\sqrt{165}}{11} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{165}}{11} \right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{165}}{11} \times \frac{\sqrt{165}}{11} \times \left(-\frac{5}{6} \right) = 5$$

$AB > 0$ であるから $AB = \sqrt{5}$

$$\triangle ABC \text{ に正弦定理を適用すると } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2OA$$



$$\text{よって } \sin \angle ACB = \frac{AB}{2OA} = \frac{\sqrt{5}}{2 \times \frac{\sqrt{165}}{11}} = \frac{\sqrt{5} \times 11}{2 \times \sqrt{165}} = \frac{\sqrt{5} \times 11}{2 \times \sqrt{3 \times 5 \times 11}} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

CA = x とする. $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos \angle ACB$$

$$\text{ゆえに } 5 = x^2 + 3 - 2 \times x \times \sqrt{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}}{6} \right)^2}$$

$$\text{よって } x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに } (x+1)(x-2) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 2$ よって $CA = 2$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \angle ACB$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\text{更に } DO = OA \tan \angle DAO = \frac{\sqrt{165}}{11} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{330}}{11}$$

$$\text{ゆえに, 体積は } \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{33}}{2} \times \frac{\sqrt{330}}{11} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

10 [2002センター]

$$1 + \tan^2 \angle DAO = \frac{1}{\cos^2 \angle DAO} \text{ から}$$

$$\cos^2 \angle DAO = \frac{1}{3}$$

$\triangle DAO$ において, $\angle DOA = 90^\circ$ であるから

$$0^\circ < \angle DAO < 90^\circ$$

よって $\cos \angle DAO > 0$

$$\text{ゆえに } \cos \angle DAO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって, 円 } O \text{ の半径は } OA = DA \cos \angle DAO = \frac{3\sqrt{55}}{11} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{165}}{11}$$

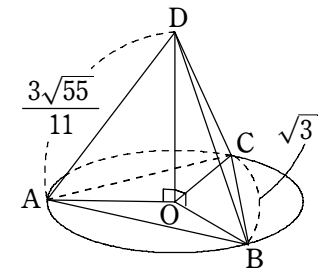
$\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos \angle AOB$$

$$= \left(\frac{\sqrt{165}}{11} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{165}}{11} \right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{165}}{11} \times \frac{\sqrt{165}}{11} \times \left(-\frac{5}{6} \right) = 5$$

$AB > 0$ であるから $AB = \sqrt{5}$

$$\triangle ABC \text{ に正弦定理を適用すると } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2OA$$



よって $\sin \angle ACB = \frac{AB}{2OA} = \frac{\sqrt{5}}{2 \times \frac{\sqrt{165}}{11}} = \frac{\sqrt{5 \times 33}}{\sqrt{6}}$

CA = x とする. $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos \angle ACB$$

ゆえに $5 = x^2 + 3 - 2 \times x \times \sqrt{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right)^2}$

よって $x^2 - x - 2 = 0$ ゆえに $(x+1)(x-2) = 0$

$x > 0$ であるから $x = 2$ よって $CA = 2$

したがって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \angle ACB$
 $= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

更に $DO = OA \tan \angle DAO = \frac{\sqrt{165}}{11} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{330}}{11}$

よって、体積は $\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{2} \times \frac{\sqrt{330}}{11} = \frac{\sqrt{330}}{6}$

11 [2002センター]

$$\begin{aligned} s^2 + a^2 &= (\sin x + \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 \\ &= \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y + \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y \\ &= 2 - 2\cos(x+y) \end{aligned}$$

$s^2 = -a^2 + 2 - 2\cos(x+y)$ で a は定数であるから, $\cos(x+y)$ が最小のとき s^2 は最大となる.

$\cos(x+y) = -1$ となる x, y があれば, s の最大値は

$$\sqrt{-a^2 + 2 - 2 \times (-1)} = \sqrt{4 - a^2} \text{ となる.}$$

② の範囲では $0^\circ \leq x+y \leq 360^\circ$

この範囲で $\cos(x+y) = -1$ となるのは $x+y = 180^\circ$ のときである.

このとき $\cos x + \cos y = \cos x + \cos(180^\circ - x) = \cos x - \cos x = 0$

これと ① から $\cos x = \frac{a}{2}, \cos y = -\frac{a}{2}$

$-2 \leq a \leq 2$ であるから, ② の範囲にこれを満たす x, y は存在する.

12 [2001センター]

図から $\angle ABC < 90^\circ$

よって $\cos \angle ABC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ABC}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \angle ABD = \cos(180^\circ - \angle ABC)$$

$$= -\cos \angle ABC = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

また, 三角形 ADB に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD \\ &= 3^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ &= 20 \end{aligned}$$

ゆえに $AD = 2\sqrt{5}$

よって, 三角形 ADB に正弦定理を適用すると

$$2OA = \frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2\sqrt{5} \div \frac{2\sqrt{5}}{5} = 5$$

ゆえに, 円 O の半径は $\frac{5}{2}$

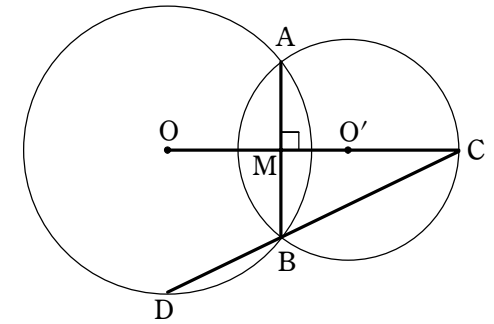
また $\triangle ABD$ の面積は $\frac{1}{2} AB \cdot BD \sin \angle ABD$
 $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3$

一方, 直線 OO' と直線 AB の交点を M とすると

$$BC = BM \div \cos \angle ABC = \frac{3}{2} \div \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

となり, $\triangle ADC$ の面積は, $\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ の面積の和で表されるから

$$3 + \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{15}{2}$$



13 [2001センター]

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{2}{\sin 2\theta} \dots \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{-\cos 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-2\cos^2 \theta}{\sin 2\theta} \dots\dots ② \end{aligned}$$

$\theta = 15^\circ$ として, ①と②を辺々加えると

$$2\tan 15^\circ = \frac{2}{\sin 30^\circ} + \frac{-2\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 4 - 2\sqrt{3}$$

ゆえに $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

(2) $15^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ であるから $30^\circ \leq 2\theta \leq 120^\circ$

よって $\frac{1}{2} \leq \sin 2\theta \leq 1$ ゆえに $2 \leq \frac{2}{\sin 2\theta} \leq 4$

$\frac{2}{\sin 2\theta} = 2$ のとき $\sin 2\theta = 1$ $30^\circ \leq 2\theta \leq 120^\circ$ では $\theta = 45^\circ$

$\frac{2}{\sin 2\theta} = 4$ のとき $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ $30^\circ \leq 2\theta \leq 120^\circ$ では $\theta = 15^\circ$

したがって, ①から

$\theta = 45^\circ$ のとき最小値 $\frac{2}{1} = 2$, $\theta = 15^\circ$ のとき最大値 $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ をとる.

14 [2001センター]

$0^\circ \leq \theta \leq 210^\circ$ において $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$ よって $\frac{x-1}{2} \leq x \leq 1 \dots\dots ①$

また, $y = 3x - 2x^3$ から $y' = 3 - 6x^2 = -6\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって, ①の範囲で y の増減表を書くと右のようになる.

x	$-\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...	1
y'		+	0	-	
y		↗	極大	↘	

$f(x) = 3x - 2x^3$ とおくと

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{4}$

$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 1$

ゆえに, y は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとり, $x = -\frac{1}{2}$ のとき最小値

$-\frac{5}{4}$ をとる.

θ の関数としては, $0^\circ \leq \theta \leq 210^\circ$ において y は

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, すなわち $\theta = 45^\circ$ および $\theta = 135^\circ$ のとき最大

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$ のとき, すなわち $\theta = 210^\circ$ のとき最小である.

15 [2001センター]

三角形 ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから $BD = 2\sqrt{2}$

三角形 ABD に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$$

ここで, $\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって $2R = 2\sqrt{2} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3$ ゆえに $R = \frac{3}{2}$

$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

また, 三角形 ABC に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

よって $AC = 2R \sin \angle ABC = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$

$BC = x$ とおいて, 三角形 ABC に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

よって $(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

ゆえに $x^2 - 2x - 3 = 0$ したがって $(x+1)(x-3) = 0$

$x > 0$ であるから $x = 3$ ゆえに $BC = 3$

また, $CD = y$ とおくと, 三角形 ACD に余弦定理を適用すると

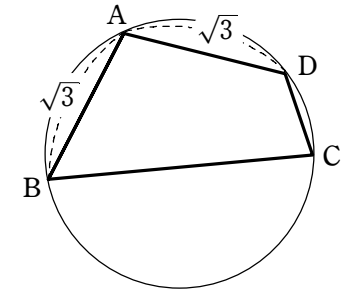
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC$$

よって $(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + y^2 - 2\sqrt{3} \cdot y \cdot \cos(180^\circ - \angle ABC)$

ゆえに $6 = 3 + y^2 + 2\sqrt{3}y \cdot \cos \angle ABC$

したがって $3 + y^2 + 2\sqrt{3}y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 6 = 0$

すなわち $y^2 + 2y - 3 = 0$ よって $(y+3)(y-1) = 0$



$y > 0$ であるから $y = 1$ したがって $CD = 1$
 更に, $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

16 [2001センター]

三角形 ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから $BD = 2\sqrt{2}$

三角形 ABD に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$$

$$\text{ここで, } \sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって } 2R = 2\sqrt{2} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3 \quad \text{ゆえに } R = \frac{3}{2}$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

また, 三角形 ABC に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\text{よって } AC = 2R \sin \angle ABC = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

また, $CD = x$ とおく. 三角形 ACD に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC$$

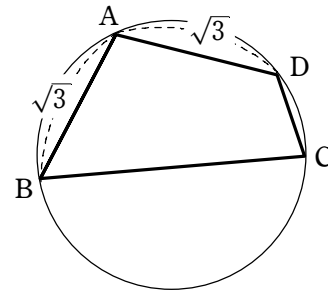
$$\text{よって } (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos(180^\circ - \angle ABC)$$

$$\text{ゆえに } 6 = 3 + x^2 + 2\sqrt{3}x \cdot \cos \angle ABC$$

$$\text{したがって } 3 + x^2 + 2\sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 6 = 0$$

$$\text{すなわち } x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{よって } (x+3)(x-1) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 1$ したがって $CD = 1$



17 [2001センター]

$$\text{半角の公式により } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\text{よって } \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\begin{aligned} \text{また } \cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta(1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \cos^3 \theta = \frac{3}{4}\cos \theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta$$

$$\begin{aligned} \text{よって } 4(1 + \cos \theta)^3 &= 4\cos^3 \theta + 12\cos^2 \theta + 12\cos \theta + 4 \\ &= (3\cos \theta + \cos 3\theta) + (6 + 6\cos 2\theta) + 12\cos \theta + 4 \\ &= 10 + 15\cos \theta + 6\cos 2\theta + \cos 3\theta \end{aligned}$$

18 [2000センター]

$\triangle ABC$ において, 余弦定理から

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 3^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$AC > 0$ であるから $AC = 3$

$AD = x$ とする. $\triangle ACD$ において, 余弦定理から

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC \dots\dots \textcircled{1}$$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \cos \angle ADC &= \cos(180^\circ - \angle ABC) \\ &= -\cos \angle ABC \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

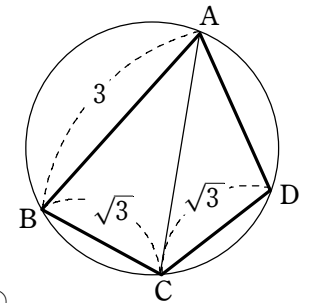
$$\text{ゆえに, } \textcircled{1} \text{ から } 3^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2 - 2x \cdot \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\text{整理すると } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{よって } (x+3)(x-2) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 2$

すなわち $AD = 2$



また $\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{6}$

円 O の半径を R とすると、正弦定理から $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$

よって $R = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{6}} = \frac{3\sqrt{33}}{11}$

また $S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{33}}{4}$

$S_2 = \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \sin \angle ADC = \sqrt{3} \sin \angle ADC$

ここで、② から

$\sin \angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{33}}{6}$

ゆえに $S_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

19 [2000センター]

△ABC において、余弦定理から

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$
 $= 3^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$
 $= 9$

AC > 0 であるから AC = 3

AD = x とする。△ACD において、余弦定理から

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC \dots\dots ①$

四角形 ABCD は円に内接しているから $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$

よって $\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

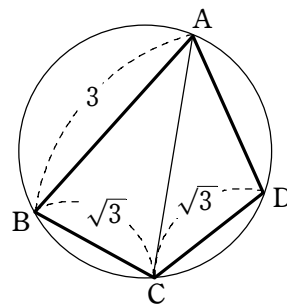
ゆえに、① から $3^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2 - 2x \cdot \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

整理すると $x^2 + x - 6 = 0$ よって $(x+3)(x-2) = 0$

x > 0 であるから x = 2 すなわち AD = 2

円 O の半径を R とすると、正弦定理から $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R \dots\dots ②$

ここで $\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{6}$



よって、② から $R = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{6}} = \frac{3\sqrt{33}}{11}$

また $S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin \angle BAD = 3 \sin \angle BAD$,

$S_2 = \frac{1}{2} CB \cdot CD \sin \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sin \angle BCD = \frac{3}{2} \sin \angle BCD$

ここで、四角形 ABCD は円に内接しているから $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$

ゆえに $\sin \angle BAD = \sin(180^\circ - \angle BCD) = \sin \angle BCD$

よって $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$

20 [2000センター]

(1) θ は x 軸の正の向きと直線 l のなす角を表すから、

tan θ は l の傾きに等しい。

よって tan θ = 3

また $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$

明らかに 0° < θ < 90° であるから cos θ > 0

ゆえに $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

l は線分 BC の垂直二等分線であるから、この直線は ∠CAB を 2 等分する。

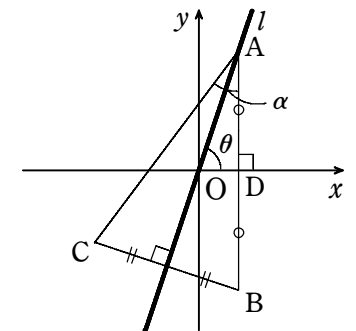
よって $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$

ゆえに、△OAD において $\frac{\alpha}{2} + \theta = 90^\circ$

したがって $\alpha = 180^\circ - 2\theta \dots\dots ①$

よって $\cos \alpha = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta = -2\cos^2 \theta + 1$

$= -2 \cdot \frac{1}{10} + 1 = \frac{4}{5} \dots\dots ②$



(2) $OA=OB, OB=OC$ であるから, O は $\triangle ABC$ の外接円の中心である.

よって $\angle BOC=2\angle BAC=2\alpha$

また $S_1 = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2}OB^2 \sin 2\theta,$

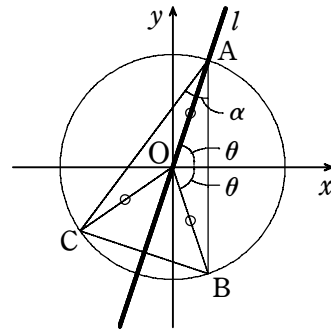
$S_2 = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \angle BOC = \frac{1}{2}OB^2 \sin 2\alpha$

ゆえに $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}$

ここで, ①, ② から

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\sin(180^\circ - 2\theta) \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \sin 2\theta$

よって $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}$



21 [2000センター]

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$

よって $\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle ABC)$

$= -\cos \angle ABC = -\frac{\text{アイ}-5}{\text{ウ}8}$

$\triangle ADC$ において, 余弦定理から

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$

$= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{\text{エオ}30}}{\text{カ}2}$

また $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{\text{キク}39}}{\text{ケ}8}$

円 O の半径を R とすると, 正弦定理から

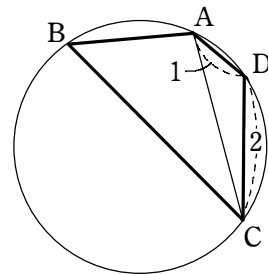
$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2R$

よって $R = \frac{\frac{\sqrt{30}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{2}{13} \sqrt{\text{コサ}130}$

$AB = x (x > 0)$ とすると, 条件から $BC = 2x$

$\triangle ABC$ において, 余弦定理から

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$



ゆえに $\frac{15}{2} = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{5}{8}$ よって $x^2 = 3$

$x > 0$ から $x = \sqrt{3}$ すなわち $AB = \sqrt{3}$

また $BC = 2\sqrt{3}$

四角形 ABCD は円に内接しているから $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$

$\triangle ABD$ において, 余弦定理から

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$
 $= (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos(180^\circ - \angle BCD)$
 $= 4 + 2\sqrt{3} \cos \angle BCD \dots\dots ①$

同様に, $\triangle BCD$ において, 余弦定理から

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD$
 $= (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cos \angle BCD$
 $= 16 - 8\sqrt{3} \cos \angle BCD \dots\dots ②$

①, ② から $4 + 2\sqrt{3} \cos \angle BCD = 16 - 8\sqrt{3} \cos \angle BCD$

よって $\cos \angle BCD = \frac{2}{5} \sqrt{3}$

このとき, ① から $BD^2 = 4 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{3} = \frac{32}{5}$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{\frac{32}{5}} = \frac{4}{5} \sqrt{\text{セソ}10}$

22 [2000センター]

$\triangle ADC$ において, 余弦定理から

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC \dots\dots ①$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$

よって $\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle ABC)$

$= -\cos \angle ABC = -\frac{5}{8}$

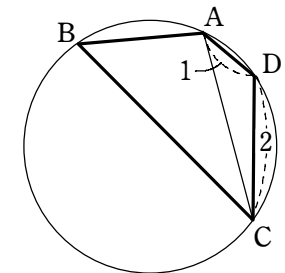
ゆえに, ① から $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{\text{アイ}30}}{\text{ウ}2}$

円 O の半径を R とすると, 正弦定理から $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = 2R \dots\dots ②$

ここで $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC}$

$= \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{8}$



よって、②から
$$R = \frac{\frac{\sqrt{30}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{2}{13} \sqrt{\frac{130}{39}}$$

AB = x (x > 0) とすると、条件から BC = 2x
 △ABC において、余弦定理から

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

ゆえに
$$\frac{15}{2} = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{5}{8}$$
 よって $x^2 = 3$

x > 0 から $x = \sqrt{3}$ すなわち $AB = \sqrt{3}$

また $BC = 2\sqrt{3}$

四角形 ABCD は円に内接しているから $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$

△ABD において、余弦定理から

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD \\ &= (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos(180^\circ - \angle BCD) \\ &= 4 + 2\sqrt{3} \cos \angle BCD \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

同様に、△BCD において、余弦定理から

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD \\ &= (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cos \angle BCD \\ &= 16 - 8\sqrt{3} \cos \angle BCD \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④ から $4 + 2\sqrt{3} \cos \angle BCD = 16 - 8\sqrt{3} \cos \angle BCD$

よって $\cos \angle BCD = \frac{2}{5} \sqrt{3}$

このとき、③から $BD^2 = 4 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{3} = \frac{32}{5}$

BD > 0 であるから $BD = \sqrt{\frac{32}{5}} = \frac{4}{5} \sqrt{10}$

23 [2000センター]

(1) $F(x) = a(\sin x \cos 60^\circ - \cos x \sin 60^\circ) + a(\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ) - 2\sin^2 x$
 $= 2a \sin x \cos 60^\circ - 2\sin^2 x$

$$= (a - 2\sin x) \sin x$$

(2) $F(x) \geq 0$ から $(a - 2\sin x) \sin x \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき、常に $\sin x \geq 0$

であるから、①が常に成り立つためには

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき $a - 2\sin x \geq 0$

が常に成り立てばよい。

$a - 2\sin x \geq 0$ から $2\sin x \leq a$

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ における $2\sin x$ の最大値は 2 ($x = 90^\circ$ のとき)

よって、常に $F(x) \geq 0$ となるのは $a \geq 2$ のとき。

ゆえに、a の最小値は 2

(3) $\sin x = t$ とおくと、 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ から $0 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

また、 $F(x) = G(t)$ とおくと、(1)から

$$G(t) = (a - 2t)t = -2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8}$$

$0 < a \leq 2$ のとき、 $0 < \frac{a}{4} \leq \frac{1}{2}$ であるから、②の範囲で $G(t)$ (すなわち $F(x)$) は

$t = \frac{a}{4}$ のとき最大値 $m = \frac{1}{8} a^2$,

$t = 1$ のとき最小値 $n = a - 2$ をとる。

$0 < a \leq 2$ のとき $G(1) = a - 2 \leq 0$

また $G(0) = 0$

よって、 $y = G(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) と $y = b$ のグラフは右の図のようになり、異なる 2 点で交わる。

また、その交点の x 座標を α, β ($\alpha \neq \beta$) とすると、 α, β は t の方程式 $G(t) = b$ の解である。

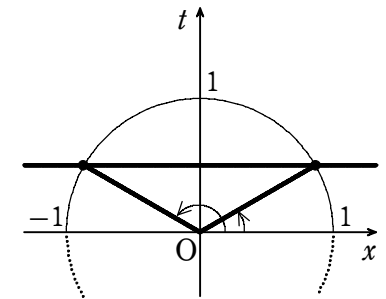
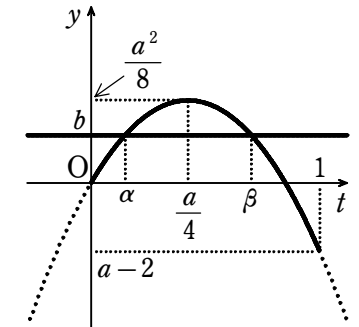
ゆえに、 $F(x) = b$ から $\sin x = \alpha, \beta$

右上の図より、 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ であるから、

$\sin x = \alpha$ と $\sin x = \beta$ は $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき、

それぞれ 2 個ずつ解をもつ。

よって、 $F(x) = b$ の解は 4 個



24 [2000センター]

直線 ① と x 軸のなす角は 2θ である。

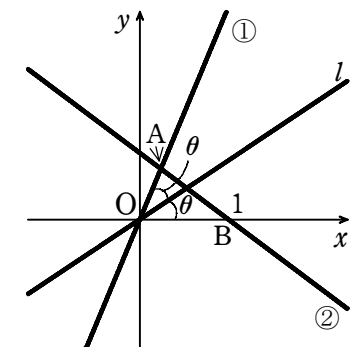
よって、tan 2θ は直線 ① の傾きに等しいから

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{12}}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

t = tan θ とおく。

2倍角の公式から $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2t}{1 - t^2}$

よって、③から $\frac{2t}{1 - t^2} = \frac{12}{5}$



分母を払って整理すると $6t^2 + 5t - 6 = 0$

ゆえに $(3t - 2)(2t + 3) = 0 \dots\dots ④$

ここで、 $0^\circ < 2\theta < 90^\circ$ であるから $0^\circ < \theta < 45^\circ$

よって $0 < t < 1$

ゆえに、④ から $t = \frac{2}{3}$

したがって、 l の方程式は $y = \frac{2}{3}x \dots\dots ⑤$

m と x 軸のなす角を α とする。

直線 ② と x 軸のなす角は 2α であるから $\tan 2\alpha = -\frac{3}{4} \dots\dots ⑥$

$s = \tan \alpha$ とおくと、⑥ から $\frac{2s}{1-s^2} = -\frac{3}{4}$

よって $3s^2 - 8s - 3 = 0$

ゆえに $(3s + 1)(s - 3) = 0 \dots\dots ⑦$

ここで、 $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$ であるから $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

よって、 $s > 0$ であるから、⑦ より $s = 3$

したがって、 m は点 $(1, 0)$ を通り、傾き 3 の直線であるから、その方程式は

$y = 3(x - 1)$ すなわち $y = 3x - 3$

l と m の交点の x 座標は $\frac{2}{3}x = 3x - 3$ を解いて $x = \frac{9}{7}$

また、交点の y 座標は $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{6}{7}$

ゆえに、交点の座標は $(\frac{9}{7}, \frac{6}{7})$

25 [1999センター]

$\triangle ABC$ は、 $AB = BC = 2\sqrt{2}$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ の二等辺三角形。

よって $AC = (AB \cos 30^\circ) \times 2 = 2\sqrt{6}$

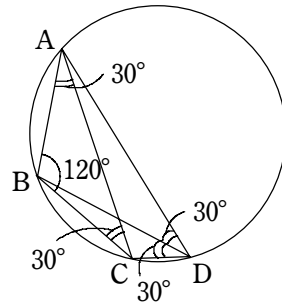
$\angle BDC = \angle BAC = 30^\circ$ であり、円 O の半径 R は、

$\triangle ABC$ において、正弦定理により

$R = \frac{2\sqrt{6}}{2\sin 120^\circ} = 2\sqrt{2}$

また、 $\triangle ABD$ において、正弦定理により

$\sin \angle BAD = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$



次に、 $\triangle ABD$ において、余弦定理を適用すると、

$(2\sqrt{2})^2 = AD^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot AD \cdot 2\sqrt{3} \cos 30^\circ$

ゆえに $AD^2 - 6AD + 4 = 0$ よって $AD = 3 \pm \sqrt{5}$

更に、 $\triangle CBD$ において、余弦定理を適用すると、上と同様にして $CD = 3 \pm \sqrt{5}$

仮定より $AD > CD$ であるから $AD = 3 + \sqrt{5}$ 、 $CD = 3 - \sqrt{5}$

このとき、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABD + \triangle CBD &= \frac{1}{2}(AD + CD) \times BD \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

26 [1999センター]

$\triangle ABC$ は、 $AB = BC = 2\sqrt{2}$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ の二等辺三角形。

よって $AC = (AB \cos 30^\circ) \times 2 = 2\sqrt{6}$

$\angle BDC = \angle BAC = 30^\circ$

また、 $\triangle ABD$ において、余弦定理を適用すると、

$(2\sqrt{2})^2 = AD^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot AD \cdot 2\sqrt{3} \cos 30^\circ$

ゆえに $AD^2 - 6AD + 4 = 0$

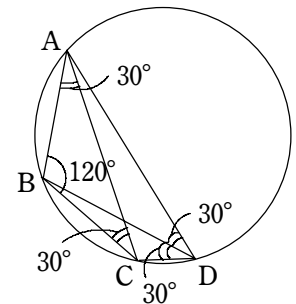
よって $AD = 3 \pm \sqrt{5}$

次に、 $\triangle CBD$ において、余弦定理を適用すると、上と同様にして $CD = 3 \pm \sqrt{5}$

仮定より $AD > CD$ であるから $AD = 3 + \sqrt{5}$ 、 $CD = 3 - \sqrt{5}$

このとき、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\triangle ABD + \triangle CBD = \frac{1}{2}(AD + CD) \times BD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$$



27 [1999センター]

(1) $DE \parallel BC$ から $AD : DB = AE : EC$

よって $t : 1 = 1 : (t + 1) \dots\dots ①$

また、点 D, E はそれぞれ辺 AB, AC 上の点であるから $t \geq 0$ である。

① から $t^2 + t - 1 = 0$

$t \geq 0$ に注意して解くと $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) $\triangle ABF$ と $\triangle AFC$ は、底辺をそれぞれ BF , FC とすると、高さが等しいから

$$S_1 : S_2 = \overset{\text{オ}}{\text{BF}} : \overset{\text{カキ}}{\text{FC}}$$

(または $FB : CF$ または $BF : CF$ または $FB : FC$)

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AF \sin \angle BAF, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AF \sin \angle FAC \text{ から}$$

$$S_1 : S_2 = \overset{\text{クケ}}{AB \sin \angle BAF} : \overset{\text{コサ}}{AC \sin \angle FAC}$$

(または $AB \sin \angle BAF : CA \sin \angle FAC$ または $BA \sin \angle BAF : AC \sin \angle FAC$)

または $BA \sin \angle BAF : CA \sin \angle FAC$)

AF が $\triangle ABC$ の内心を通るならば、 $\angle BAF = \angle FAC$ から

$$BF : FC = \overset{\text{シス}}{AB} : AC \quad (\text{または } BA : AC)$$

更に $AC = 12AB$ のとき、チェバの定理により $\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$ であるから

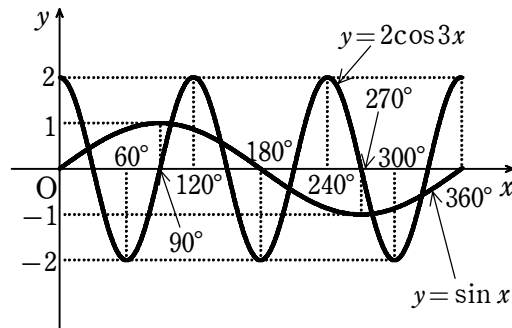
$$\frac{1}{12} \cdot \frac{t+1}{1} \cdot \frac{t}{1} = \frac{(t+1)t}{12} = 1$$

$t \geq 0$ に注意して解くと $t = \overset{\text{セ}}{3}$

28 [1999センター]

$X = 3x$ とおく. $y = 2\cos X$ の周期のうち正で最小のものは 360°

ゆえに $y = 2\cos 3x$ の周期のうち正で最小のものは $\overset{\text{アイウ}}{120^\circ}$



図から $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ のとき、関数 $y = 2\cos 3x$ において $y = 2$ となる x は $\overset{\text{エ}}{4}$ 個、

$y = -2$ となる x は $\overset{\text{オ}}{3}$ 個. $\sin x = 2\cos 3x$ は $\overset{\text{カ}}{6}$ 個の解をもつ.

29 [1999センター]

$$\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = \overset{\text{アイウ}}{120^\circ}$$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$$

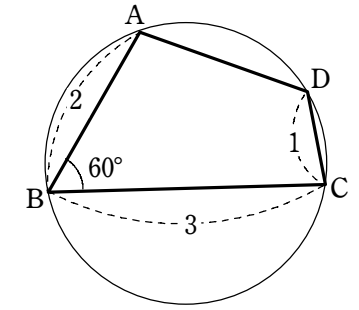
$$\text{ゆえに } AC = \sqrt{\overset{\text{エ}}{7}}$$

$\triangle ACD$ において、余弦定理により

$$7 = 1^2 + AD^2 - 2 \cdot 1 \cdot AD \cdot \cos 120^\circ$$

$$\text{よって } AD^2 + AD - 6 = 0$$

$$AD > 0 \text{ であるから } AD = \overset{\text{オ}}{2}$$



また、円 O の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R$

$$\text{よって } R = \frac{\sqrt{\overset{\text{カキ}}{21}}}{3}$$

$$\text{ゆえに } \frac{3}{\sin \angle BAC} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ から } \sin \angle BAC = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{\overset{\text{ク}}{3}\sqrt{\overset{\text{ケ}}{21}}}{14}$$

$\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \angle BAD = 8 - 8\cos \angle BAD \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle CDB$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \angle BCD = 10 - 6\cos \angle BCD \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ と、 } \cos \angle BCD = -\cos \angle BAD \text{ から } 8 - 8\cos \angle BAD = 10 + 6\cos \angle BAD$$

$$\text{ゆえに } \cos \angle BAD = -\frac{1}{7}$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ から } BD^2 = \frac{64}{7} \quad \text{ゆえに } BD = \frac{\overset{\text{サ}}{8}\sqrt{\overset{\text{シ}}{7}}}{\overset{\text{ス}}{7}}$$

$$\sin \angle BCD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\overset{\text{セ}}{4}\sqrt{\overset{\text{ソ}}{3}}}{\overset{\text{タ}}{7}}$$

$$\text{よって } \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{\overset{\text{チ}}{6}\sqrt{\overset{\text{ツ}}{3}}}{\overset{\text{テ}}{7}}$$

30 [1999センター]

$\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$$

ゆえに $AC = \sqrt{7}$

$\triangle ACD$ において、余弦定理により

$$7 = 1^2 + AD^2 - 2 \cdot 1 \cdot AD \cdot \cos 120^\circ$$

よって $AD^2 + AD - 6 = 0$

$AD > 0$ であるから $AD = 2$

また、 $\triangle ABC$ において、正弦定理により $\frac{3}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

よって $\sin \angle BAC = \frac{3}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

$\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \angle BAD = 8 - 8 \cos \angle BAD \dots\dots ①$$

$\triangle CDB$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \angle BCD = 10 - 6 \cos \angle BCD \dots\dots ②$$

①、②と、 $\cos \angle BCD = -\cos \angle BAD$ から $8 - 8 \cos \angle BAD = 10 + 6 \cos \angle BAD$

ゆえに $\cos \angle BAD = -\frac{1}{7}$

これと①から $BD^2 = \frac{64}{7}$

ゆえに $BD = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

別解 トレミーの定理により $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ であるから

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = \sqrt{7} \cdot BD$$

ゆえに $BD = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

31 [1999センター]

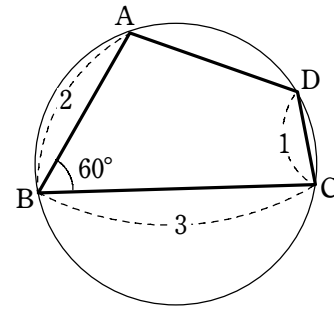
$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ)$ と表され、 $-45^\circ \leq \theta - 45^\circ < 315^\circ$ であるから

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$x^3 = \sin^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) - \cos^3 \theta$$

を用いると $y = x^3 + 3 \cdot \frac{1-x^2}{2} \cdot x = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$



よって、 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ で y の増減を調べると、 y は $x=1$ のとき最大値 1 をとる。
このときの θ の値は $\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) = 1$ 、 $-45^\circ \leq \theta - 45^\circ < 315^\circ$ を解いて
シズ 90° または センタ 180°

32 [1998センター]

$$\cos \angle ABC = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 18$$

ゆえに $AC = 3\sqrt{2}$

円の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2R$

ゆえに $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

同様に $\frac{\sqrt{6}}{\sin \angle CAB} = 3\sqrt{6}$ から

$$\sin \angle CAB = \frac{1}{3}, \frac{2}{\sin \angle ACB} = 3\sqrt{6} \text{ から } \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

また、三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \times AB \times BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \sqrt{2}$ で

あり、 $CH = BC \cos \angle ACB = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ 、 $BD = BH + HD$

ここで $BH = BC \sin \angle ACB = \frac{2}{3}$ 、

$$HD = CH \tan \angle ACD = CH \tan(90^\circ - \angle BDC) = CH \tan(90^\circ - \angle CAB) = \frac{CH}{\tan \angle CAB}$$

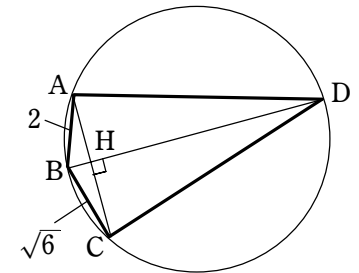
$\cos^2 \angle CAB = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ より $\tan^2 \angle CAB = \frac{1}{\cos^2 \angle CAB} - 1 = \frac{1}{8}$ であるから

$$\tan \angle CAB = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ゆえに $HD = \frac{CH}{\tan \angle CAB} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{20}{3}$

したがって、 $BD = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{22}{3}$ であり、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{22}{3} = 11\sqrt{2}$$



33 [1998センター]

$$\cos \angle ABC = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{3}$$

△ABCにおいて、余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 18$$

ゆえに $AC = 3\sqrt{2}$

円の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2R$

ゆえに $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

同様に $\frac{\sqrt{6}}{\sin \angle CAB} = 3\sqrt{6}$ から $\sin \angle CAB = \frac{1}{3}$,

$$\frac{2}{\sin \angle ACB} = 3\sqrt{6} \text{ から } \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

また $\angle ADH = \angle ACB$ から $\frac{DH}{AD} = \cos \angle ACB = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

ゆえに $AD = \frac{9}{5\sqrt{3}}DH$

$\angle CDH = \angle CAB$ から $\frac{DH}{CD} = \cos \angle CAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ゆえに $CD = \frac{3}{2\sqrt{2}}DH$

よって、△ADCにおいて、余弦定理を適用すると

$$\left(\frac{9}{5\sqrt{3}}DH\right)^2 + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}DH\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{5\sqrt{3}}DH \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}DH \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 18$$

ゆえに $DH^2 = \frac{400}{9}$ よって $DH = \frac{20}{3}$ …… ①

また $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

よって $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot BH = \sqrt{2}$ から $BH = \frac{2}{3}$ …… ②

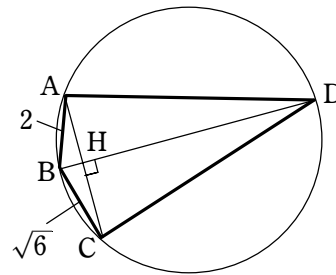
①, ② から $DH = 10BH$

別解 $DH = 10BH$ は次のようにしても導かれる.

三平方の定理から $AH^2 + BH^2 = 4, CH^2 + BH^2 = 6$

辺々引いて $CH^2 - AH^2 = 2$ ゆえに $(CH + AH)(CH - AH) = 2$

$CH + AH = 3\sqrt{2}$ であるから $CH - AH = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ゆえに $AH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$



よって $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{2}{3}$ …… ③

$$DH = \frac{AH}{\tan \angle ADH} = \frac{AH}{\tan \angle ACB}$$

ここで $1 + \tan^2 \angle ACB = \frac{1}{\cos^2 \angle ACB}$ から $\tan \angle ACB = \frac{\sqrt{2}}{5}$

よって $DH = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{20}{3}$ …… ④

③, ④ から $DH = 10BH$

34 [1998センター]

(1) $f(60^\circ) = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

(2) $f(\theta) = 2\sqrt{2} \sin(\theta + 60^\circ)$, $60^\circ \leq \theta + 60^\circ \leq 150^\circ$ であるから $\theta = 90^\circ$ のとき, $f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{2}$ をとる.

(3) $g(\theta) = 2\sqrt{2} \cos(\theta + 60^\circ)$ と表される.

特に $g(\theta) = -\frac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば $\cos(\theta + 60^\circ) = -\frac{4}{5}$

よって $\sin(\theta + 60^\circ) = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

ゆえに $f(\theta) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$

また, 連立方程式 $\sin(\theta + 60^\circ) = \frac{3}{5}, \cos(\theta + 60^\circ) = -\frac{4}{5}$

すなわち $\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{3}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = -\frac{4}{5}$ を解いて

$$\sin \theta = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$$

35 [1998センター]

- (1) $\angle A = \theta$ とおくと $\angle C = 180^\circ - \theta$

よって、余弦定理により

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \theta,$$

$$BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cos(180^\circ - \theta)$$

ゆえに $34 - 30 \cos \theta = 98 + 98 \cos \theta$

よって $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\theta = 120^\circ$

ゆえに $\angle A = 120^\circ$

よって $BD = \sqrt{34 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 7$

同様にして $AC^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos \angle B,$

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(180^\circ - \angle B)$$

ゆえに $58 - 42 \cos \angle B = 74 + 70 \cos \angle B$ から $\cos \angle B = -\frac{1}{7}$

よって $AC = \sqrt{58 - 42 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)} = 8$

[別解] トレミーの定理により $7 \cdot AC = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$ ゆえに $AC = 8$

また、 $\angle C = 60^\circ$ であるから

$$(\text{四角形 } ABCD) = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$$

- (2) 円 O の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{BD}{\sin \angle A} = 2R$ であるから

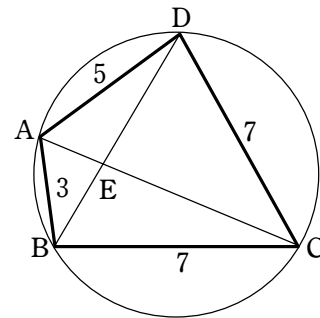
$$R = \frac{7}{2 \sin 120^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

- (3) $\triangle ABD$ の内接円の半径を r とすると $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ = \frac{1}{2} (3 + 5 + 7)r$

ゆえに $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- (4) 四角形 ABCD の面積について $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin \angle AEB = 16\sqrt{3}$

ゆえに $\sin \angle AEB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$



36 [1998センター]

- (1) $\angle A = \theta$ とおくと $\angle C = 180^\circ - \theta$

よって、余弦定理により

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \theta,$$

$$BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cos(180^\circ - \theta)$$

ゆえに $34 - 30 \cos \theta = 98 + 98 \cos \theta$

よって $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\theta = 120^\circ$

ゆえに $\angle A = 120^\circ$

よって $BD = \sqrt{34 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 7$

同様にして $AC^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos \angle B,$

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(180^\circ - \angle B)$$

ゆえに $58 - 42 \cos \angle B = 74 + 70 \cos \angle B$ から $\cos \angle B = -\frac{1}{7}$

よって $AC = \sqrt{58 - 42 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)} = 8$

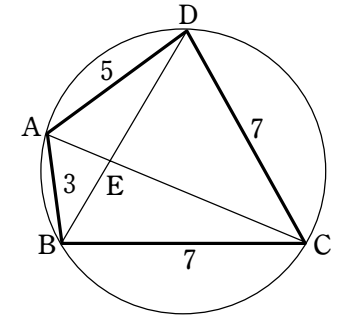
[別解] トレミーの定理により $7 \cdot AC = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$ ゆえに $AC = 8$

また、 $\angle C = 60^\circ$ であるから

$$(\text{四角形 } ABCD) = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$$

- (2) 四角形 ABCD の面積について $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin \angle AEB = 16\sqrt{3}$

ゆえに $\sin \angle AEB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$



37 [1998センター]

- (1) $\angle AOP = \theta, \angle QOB = 60^\circ - \theta$ であるから

$$\angle POQ = 120^\circ$$

ゆえに

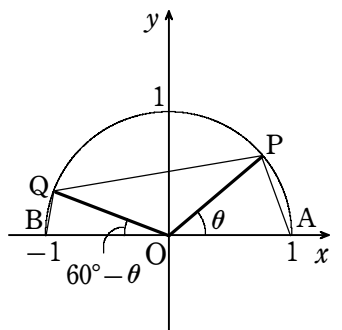
(四角形 APQB)

$$= \triangle OAP + \triangle OPQ + \triangle OQB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(60^\circ - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4}$$



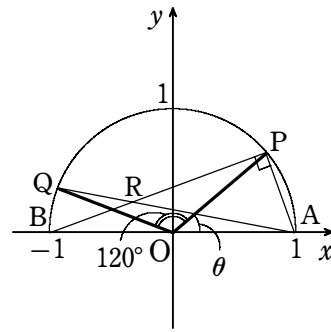
(2) $\angle APB=90^\circ, \angle ABP=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{\theta}{2}$ であるから

$$AP = AB \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\angle PAR = \angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = 60^\circ$$

また, $\angle APR=90^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle APR &= \frac{1}{2} AP \cdot PR = \frac{1}{2} AP \cdot \sqrt{3} AP = \frac{\sqrt{3}}{2} AP^2 \\ &= 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

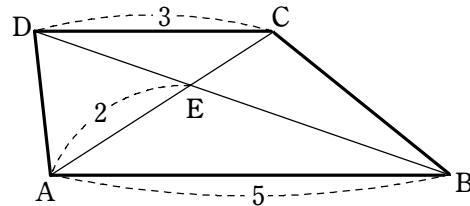


38 [1997センター]

$\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ について,
 $AB \parallel CD$ より $\angle EAB = \angle ECD,$
 $\angle EBA = \angle EDC$
 であるから $\triangle ABE \sim \triangle CDE$

ゆえに $CE = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

よって $AC = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$



また, 台形 ABCD の面積は $\frac{1}{2}(3+5) \cdot AC \sin \angle BAE = 4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{64}{13}$

また $\cos \angle BAE = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAE} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm \frac{12}{13}$

$\angle BAE$ が鋭角のとき, $\cos \angle BAE = \frac{12}{13}$ であるから, 余弦定理により

$$BE^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos \angle BAE = 29 - 20 \cdot \frac{12}{13} = \frac{137}{13} \quad \text{ゆえに} \quad BE = \sqrt{\frac{137}{13}}$$

よって, 三角形 ABE の外接円の半径は $\frac{BE}{2 \sin \angle BAE} = \frac{\sqrt{\frac{137}{13}}}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{\sqrt{1781}}{10}$

39 [1997センター]

$$\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)^2} = -\frac{9}{16}$$

よって, 余弦定理により $AC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos B = 100 + 96 \cdot \frac{9}{16} = 154$

ゆえに $AC = \sqrt{154}$

したがって, 外接円の半径は $\frac{AC}{2 \sin B} = \frac{\sqrt{154}}{2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16}} = \frac{8\sqrt{22}}{5}$

40 [1997センター]

(1) $AH \perp BC$ また, BD は直径であるから $CD \perp BC$

よって $AH \parallel CD$

同様に考えて $CH \perp AB, AD \perp AB$ から

$CH \parallel AD$

したがって, 四角形 $AHCD$ は平行四辺形である.

(2) (1) から $AH = CD, CH = AD$

よって $AH = BD \cos \angle BDC = 4 \cos 75^\circ,$

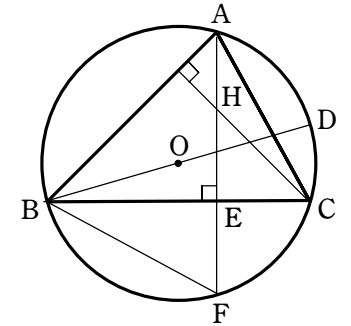
$CH = BD \cos \angle ADB = 4 \cos 60^\circ = 2$

また $\angle CBF = \angle CAF = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$

$\angle CHE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$

$BE = AB \cos 45^\circ = \sqrt{BD^2 - AD^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6},$

$EF = BE \tan \angle EBF = \sqrt{6} \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{2}$



41 [1997センター]

$x^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ から $2 \sin \theta \cos \theta = x^2 - 1$

よって $y = (x^2 - 1) - 2x - 3$ ゆえに $y = x^2 - 2x - 4$

また $x = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ), 45^\circ \leq \theta + 45^\circ < 135^\circ$ であるから
 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

したがって $y = (x-1)^2 - 5$ は, $x = -\sqrt{2}$ すなわち $\theta = 225^\circ$ のとき
 最大値 $2(\sqrt{2} - 1)$ をとり, $x = 1$ すなわち $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ のとき
 最小値 -5 をとる.

42 [1997センター]

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$AB = x$ とおくと, 余弦定理により $7^2 = x^2 + 9^2 - 2 \cdot x \cdot 9 \cos B$

よって $x^2 - 12x + 32 = 0$

ゆえに $(x-4)(x-8) = 0$ これを解いて $x = 4, 8$

$AB < AC$ であるから $x < 7$

よって $AB = 4$

正弦定理により、外接円の半径は $\frac{7}{2\sin B} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$

更に、正弦定理により $\sin A = \frac{BC}{2 \cdot \frac{21\sqrt{5}}{10}} = \frac{9}{2 \cdot \frac{21\sqrt{5}}{10}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

余弦定理により $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{-2}{7}$

また、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \sin B = 6\sqrt{5}$

$\cos \angle BDC = \cos(180^\circ - A) = -\cos A = \frac{2}{7}$

$BD = CD = y$ とおくと、余弦定理により $9^2 = y^2 + y^2 - 2y \cdot y \cdot \frac{2}{7}$

よって $y^2 = \frac{7}{10} \cdot 9^2$

$y > 0$ であるから $y = \frac{9\sqrt{70}}{10}$

したがって $BD = \frac{9\sqrt{70}}{10}$

43 [1997センター]

$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$AB = x$ とおくと、余弦定理により $7^2 = x^2 + 9^2 - 2 \cdot x \cdot 9 \cos B$

よって $x^2 - 12x + 32 = 0$

ゆえに $(x-4)(x-8) = 0$ これを解いて $x = 4, 8$

$AB < AC$ であるから $x < 7$

よって $AB = 4$

正弦定理により、外接円の半径は $\frac{7}{2\sin B} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$

また、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \sin B = 6\sqrt{5}$

44 [1997センター]

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおけるから

$\frac{1}{r^2}(11x^2 + 12xy + 6y^2) = \frac{1}{r^2}(11r^2 \cos^2 \theta + 12r^2 \sin \theta \cos \theta + 6r^2 \sin^2 \theta)$

$= 11 \cos^2 \theta + 12 \sin \theta \cos \theta + 6 \sin^2 \theta$

$= 5 \cos^2 \theta + 12 \sin \theta \cos \theta + 6$

$= 5 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 6 \sin 2\theta + 6$

$= \frac{5}{2} \cos 2\theta + 6 \sin 2\theta + \frac{17}{2}$

$= \frac{13}{2} \left(\frac{5}{13} \cos 2\theta + \frac{12}{13} \sin 2\theta \right) + \frac{17}{2}$

$= \frac{13}{2} \sin(2\theta + \alpha) + \frac{17}{2}$

ただし $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}$

よって、 $11x^2 + 12xy + 6y^2 = 4$ から $\frac{4}{r^2} = \frac{13}{2} \sin(2\theta + \alpha) + \frac{17}{2}$

$-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$ であるから $2 \leq \frac{4}{r^2} \leq 15$

ゆえに $\frac{4}{15} \leq r^2 \leq 2$

$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$ であるから、 $x^2 + y^2$ の最大値は 2 、最小値は $\frac{4}{15}$

である。

45 [2006センター]

外接円の半径が 1 であるから、正弦定理により

$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2 \times 1$

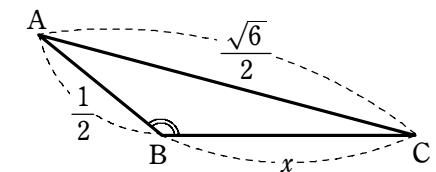
よって $\sin \angle ABC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\angle ABC > 90^\circ$ より $\cos \angle ABC < 0$ であるから

$\cos \angle ABC = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle ABC}$

$= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$

$BC = x$ とすると、余弦定理により $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$



整理すると $4x^2 + \sqrt{10}x - 5 = 0$

これを解くと $x = \frac{-\sqrt{10} \pm \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{10} \pm 3\sqrt{10}}{8}$

よって $x = \frac{\sqrt{10}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x > 0$ であるから $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ すなわち $BC = \frac{\sqrt{10}}{4}$

46 [2006センター]

三平方の定理により

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$EH = \sqrt{AH^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

よって $FH = \sqrt{EF^2 + EH^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{16} = 12$

$\triangle AFH$ において、余弦定理により

$$\cos \angle FAH = \frac{AF^2 + AH^2 - FH^2}{2AF \cdot AH} = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$$

$\sin \angle FAH > 0$ であるから

$$\sin \angle FAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FAH} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって $\triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$

四面体 $AFHE$ の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle FHE \times AE = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} EF \cdot EH\right) \cdot AE \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

また、点 E から $\triangle AFH$ に下ろした垂線の長さを l とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle AFH \times l = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{7} l = 5\sqrt{7} l$$

よって $15\sqrt{6} = 5\sqrt{7} l$ したがって $l = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}$

47 [2006センター]

三平方の定理により

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$EH = \sqrt{AH^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

よって $FH = \sqrt{EF^2 + EH^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{16} = 12$

$\triangle AFH$ において、余弦定理により

$$\cos \angle FAH = \frac{AF^2 + AH^2 - FH^2}{2AF \cdot AH} = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$$

$\sin \angle FAH > 0$ であるから

$$\sin \angle FAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FAH} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって $\triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$

条件から、点 R は $\triangle AFH$ の内心である。(2)

FP が $\angle AFH$ を 2 等分するから

$$AP : PH = AF : FH = 8 : 12 = 2 : 3$$

ゆえに $AP = \frac{2}{2+3} AH = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$

AR が $\angle FAH$ を 2 等分するから

$$FR : RP = AF : AP = 8 : 4 = 2 : 1$$

よって $PF : PR = 3 : 1$

四面体 $EAFH$ と四面体 $EAPR$ は、底面をそれぞれ $\triangle AFH$ と $\triangle ARP$ とみると、高さが等しいから、2 つの四面体の体積の比は $\triangle AFH$ と $\triangle ARP$ の面積の比に等しい。

$AP : PH = 2 : 3$ より $AP : AH = 2 : 5$ であるから

$$\triangle AFP = \frac{2}{5} \triangle AFH$$

また、 $PF : PR = 3 : 1$ から

$$\triangle ARP = \frac{1}{3} \triangle AFP$$

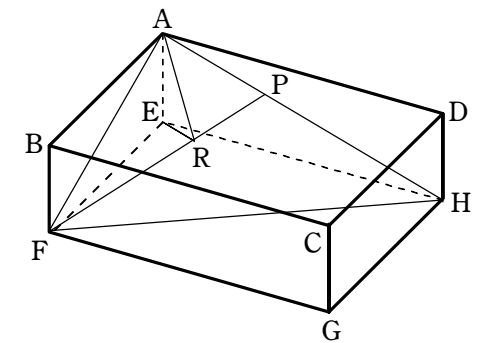
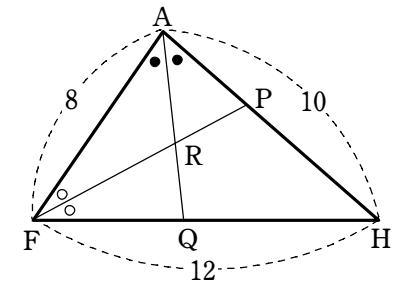
よって $\triangle ARP = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \triangle AFH = \frac{2}{15} \triangle AFH$

ゆえに、四面体 $EAPR$ の体積は、四面体 $EAFH$ の体積の $\frac{2}{15}$ 倍である。

ここで、四面体 $EAFH$ の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \triangle EFH \times AE &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} EF \cdot EH\right) \cdot AE \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

したがって、四面体 $EAPR$ の体積は $\frac{2}{15} \times 15\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$



48 [2006センター]

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2t^2$ であるから, $y = f(\theta)$ とおくと

$$y = 3(1 - 2t^2) + 4t = -6t^2 + 4t + 3$$

$$= -6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ の範囲では $0 \leq t \leq 1$

よって, y は $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{11}{3}$,

$t = 1$ のとき最小値 1 をとる。

$f(\alpha) = 3$ から $-6\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha + 3 = 3$

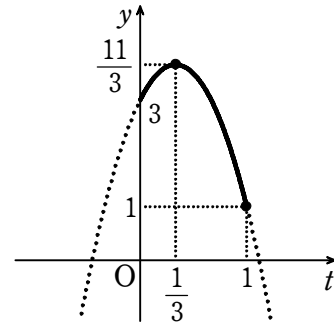
よって $\sin \alpha (3\sin \alpha - 2) = 0$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $0 < \sin \alpha < 1$ であるから $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

$\cos \alpha > 0$ であるから $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

したがって $\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \sin 30^\circ$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{6}$$



49 [2006センター]

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2t^2$ であるから, $y = f(\theta)$ とおくと

$$y = 3(1 - 2t^2) + 4t = -6t^2 + 4t + 3$$

$$= -6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ の範囲では $0 \leq t \leq 1$

よって, y は $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{11}{3}$,

$t = 1$ のとき最小値 1 をとる。

$f(\alpha) = 3$ から $-6\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha + 3 = 3$

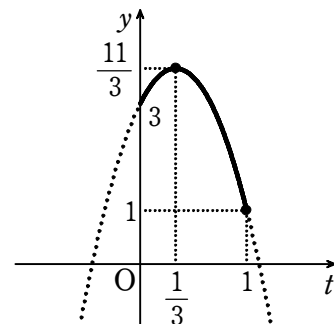
よって $\sin \alpha (3\sin \alpha - 2) = 0$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $0 < \sin \alpha < 1$ であるから $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

$\cos \alpha > 0$ であるから $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

したがって $\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \sin 30^\circ$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{6}$$



50 [2005センター]

$$\cos^2 \angle CAD = \frac{1}{1 + \tan^2 \angle CAD} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\tan \angle CAD = \frac{1}{2} > 0$ より, $\angle CAD$ は鋭角であるから

$$\cos \angle CAD > 0$$

よって $\cos \angle CAD = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\triangle ADC$ において, 余弦定理により

$$CD^2 = (2\sqrt{5})^2 + 8^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \cos \angle CAD$$

$$= 20 + 64 - 32\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 20$$

$CD > 0$ であるから $CD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

また $\sin \angle CAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAD} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

よって, $\triangle ADC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8$$

線分 AB は $\triangle ADC$ の外接円の直径であるから, この外接円の半径を R とすると

$$AB = 2R$$

$\triangle ADC$ において, 正弦定理により $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R$

よって $2R = 2\sqrt{5} \div \frac{1}{\sqrt{5}} = 10$

すなわち $AB = 10$

また, $\angle ADB = 90^\circ$ であるから, 三平方の定理により

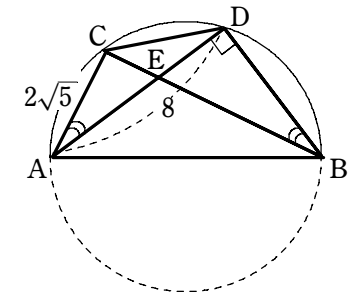
$$BD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

また $DE = BD \tan \angle EBD \dots \dots \textcircled{1}$

弧 CD に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle EBD$$

よって, $\tan \angle EBD = \tan \angle CAD = \frac{1}{2}$ であるから, $\textcircled{1}$ より $DE = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$



51 [2005センター]

$$\cos^2 \angle CAD = \frac{1}{1 + \tan^2 \angle CAD} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\tan \angle CAD = \frac{1}{2} > 0$ より, $\angle CAD$ は鋭角であるから

$$\cos \angle CAD > 0$$

$$\text{よって } \cos \angle CAD = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\triangle ADC$ において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} CD^2 &= (2\sqrt{5})^2 + 8^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \cos \angle CAD \\ &= 20 + 64 - 32\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 20 \end{aligned}$$

$$CD > 0 \text{ であるから } CD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{また } \sin \angle CAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAD} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって, $\triangle ADC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8$$

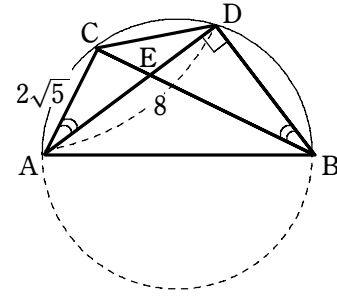
線分 AB は $\triangle ADC$ の外接円の直径であるから, この外接円の半径を R とすると

$$AB = 2R$$

$$\triangle ADC \text{ において, 正弦定理により } \frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R$$

$$\text{よって } 2R = 2\sqrt{5} \div \frac{1}{\sqrt{5}} = 10$$

$$\text{すなわち } AB = 10$$



52 [2005センター]

$$\begin{aligned} (1) \quad AC^2 &= (\cos 2\theta + 1)^2 + \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1 + \sin^2 2\theta \\ &= 2 + 2\cos 2\theta = 2 + 2(2\cos^2 \theta - 1) = 4\cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\cos 2\theta - \cos \theta)^2 + (\sin 2\theta - \sin \theta)^2 \\ &= (\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta \sin \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta) \\ &= 1 + 1 - 2\cos(2\theta - \theta) = 2 - 2\cos \theta \\ &= 2 - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } d = AC + BC = \sqrt{4\cos^2 \theta} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2|\cos \theta| + 2\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき, } 0^\circ \leq \frac{\theta}{2} \leq 90^\circ \text{ であるから } \sin \frac{\theta}{2} \geq 0$$

$$\text{ゆえに } d = 2|\cos \theta| + 2\sin \frac{\theta}{2}$$

$$(2) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ のとき } 0^\circ \leq \frac{\theta}{2} \leq 45^\circ$$

$$\text{よって } 0 \leq \sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{すなわち } 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

また, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のとき $\cos \theta \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} d &= 2\cos \theta + 2\sin \frac{\theta}{2} = 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2\sin \frac{\theta}{2} \\ &= -4t^2 + 2t + 2 = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{\theta}{2} \leq 1$$

$$\text{すなわち } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1$$

また, $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $\cos \theta \leq 0$ であるから

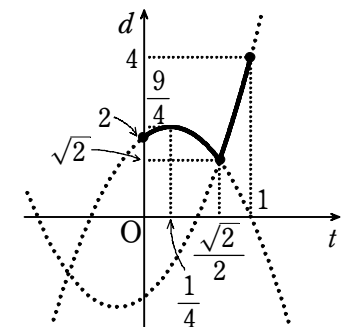
$$\begin{aligned} d &= -2\cos \theta + 2\sin \frac{\theta}{2} = -2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2\sin \frac{\theta}{2} \\ &= 4t^2 + 2t - 2 = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

右の図から, d は $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

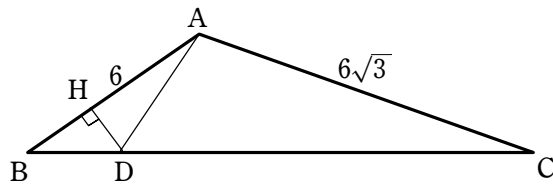
$$\text{このとき } \frac{\theta}{2} = 45^\circ \quad \text{よって } \theta = 90^\circ$$

また, d は $t = 1$ のとき最大値 4 をとる。

$$\text{このとき } \frac{\theta}{2} = 90^\circ \quad \text{よって } \theta = 180^\circ$$



53 [2005センター]



△ABCにおいて、余弦定理により

$$BC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \cos A = 36 + 108 - 72\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 216$$

BC > 0 であるから $BC = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$

△ABCにおいて、正弦定理により $\frac{6\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin B}$

よって $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin A$ …… ①

ここで $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

これを①に代入して $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

点Dから辺ABに下ろした垂線をDHとすると

$$\begin{aligned} AB &= AH + BH = AD \cos \angle BAD + BD \cos B \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} AD + BD \cdot \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{2}}{3} AD + \frac{\sqrt{6}}{3} BD \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

また、△ABDにおいて、正弦定理により $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ …… ③

ここで $\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

よって、③から $AD = \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{1}{3} \times BD = \sqrt{3} BD$

②に代入して $AB = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{3} BD + \frac{\sqrt{6}}{3} BD$

すなわち $6 = \sqrt{6} BD$ ゆえに $BD = \sqrt{6}$

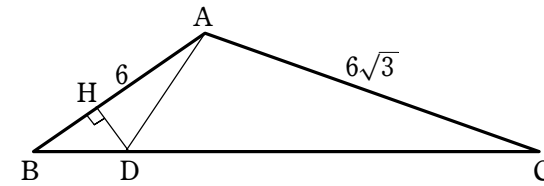
△ABDの外接円の半径をRとすると、正弦定理により $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R$

よって $R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \div \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$DC = BC - BD = 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ であるから $BD : DC = 1 : 5$

ゆえに $\triangle ACD = 5\triangle ABD = 5 \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \sin B = 15\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 15\sqrt{2}$

54 [2005センター]



△ABCにおいて、余弦定理により

$$BC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \cos A = 36 + 108 - 72\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 216$$

BC > 0 であるから $BC = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$

△ABCにおいて、正弦定理により $\frac{6\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin B}$

よって $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin A$ …… ①

ここで $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

これを①に代入して $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

点Dから辺ABに下ろした垂線をDHとすると

$$\begin{aligned} AB &= AH + BH = AD \cos \angle BAD + BD \cos B \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} AD + BD \cdot \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{2}}{3} AD + \frac{\sqrt{6}}{3} BD \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

また、△ABDにおいて、正弦定理により $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ …… ③

ここで $\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

よって、③から $AD = \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{1}{3} \times BD = \sqrt{3} BD$

ゆえに $BD = \frac{1}{\sqrt{3}} AD$

②に代入して $AB = \frac{2\sqrt{2}}{3} AD + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} AD$

すなわち $6 = \sqrt{2} AD$

したがって $AD = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

55 [2005センター]

(1) $A = b - a$, $B = b + a$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (b-a)\sin^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + (b+a)\cos^2\theta \\ &= a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2b\sin\theta\cos\theta + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1^{\text{ウ}}2b\sin\theta\cos\theta + 1^{\text{エ}}b \\ &= a\cos 2\theta + b\sin 2\theta + b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha + 2\theta) + b \end{aligned}$$

ただし $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

よって, α は $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ を満たす。

(2) $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ であるから $\alpha \leq 2\theta + \alpha < 360^\circ + \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

よって, $f(\theta)$ が最大となるのは

$$2\theta + \alpha = 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

のときで, 最小となるのは

$$2\theta + \alpha = 270^\circ \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{270^\circ - \alpha}{2}$$

のときである。

また, $f(\theta)$ の最大値は $\sqrt{a^2+b^2} + b$, 最小値は $-\sqrt{a^2+b^2} + b$ であるから, 条件より

$$\sqrt{a^2+b^2} + b = 10 + 2\sqrt{29} \quad \dots\dots ②$$

$$-\sqrt{a^2+b^2} + b = 10 - 2\sqrt{29} \quad \dots\dots ③$$

②+③ から $2b = 20$ よって $b = 10$ $\dots\dots ④$

②-③ から $2\sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{29}$

よって $a^2 + b^2 = 116$

⑤を代入すると $a^2 = 16$ ゆえに $a = \pm 4$

[1] $a = 4$, $b = 10$ のとき $A = b - a = 6$, $B = b + a = 14$

これは $0 < A < B$ を満たす。

[2] $a = -4$, $b = 10$ のとき $A = b - a = 14$, $B = b + a = 6$

これは $0 < A < B$ を満たさない。

したがって $A = 6$, $B = 14$

56 [2004センター]

$\triangle AOP$ に余弦定理を用いると

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos \angle AOP$$

ここで, $OA = x$ とおくと

$$2^2 = x^2 + (\sqrt{6})^2 - 2x \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

整理すると $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

これを解いて $x = \sqrt{3} \pm 1$

よって, 円 O の半径は

$$\sqrt{3} + 1 \quad \text{または} \quad \sqrt{3} - 1$$

以下, 円 O の半径を $\sqrt{3} - 1$ とする。

$\triangle AOP$ と $\triangle BOP$ は 3 辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。

よって $\angle AOP = \angle BOP$

ゆえに $\angle AOB = 2\angle AOP = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

したがって, $\triangle AOB$ は直角二等辺三角形である。

よって $AB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

ここで, 四角形 $AOBP$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle AOP + \triangle BOP = 2\triangle AOP = 2 \cdot \frac{1}{2}OA \cdot OP \sin \angle AOP \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

また, $\triangle ABP$ に余弦定理を用いると

$$\cos \angle APB = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2AP \cdot BP} = \frac{2^2 + 2^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < \angle APB < 180^\circ$ であるから $\angle APB = 30^\circ$

扇形 PAB , 扇形 OAB の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とすると

$$S_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

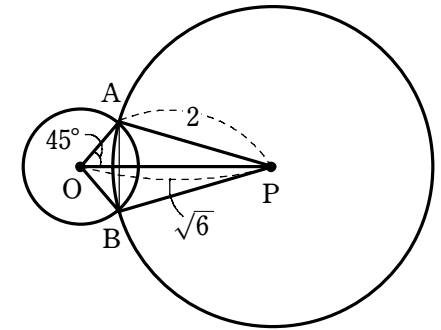
$$S_2 = \pi(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\pi$$

よって, 円 O の内部と円 P の内部の共通部分の面積は

$$S_1 + S_2 - S = \frac{\pi}{3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\pi - (3 - \sqrt{3}) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6}\pi - (3 - \sqrt{3})$$

別解 (四角形 $AOBP$ の面積 S)

$$AB \perp OP \text{ であるから } S = \frac{1}{2}AB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{6} = 3 - \sqrt{3}$$



57 [2004センター]

△AOPに余弦定理を用いると

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos \angle AOP$$

ここで、 $OA = x$ とおくと

$$2^2 = x^2 + (\sqrt{6})^2 - 2x \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

整理すると $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

これを解いて $x = \sqrt{3} \pm 1$

よって、円Oの半径は

$$\sqrt{3} + 1 \text{ または } \sqrt{3} - 1$$

以下、円Oの半径を $\sqrt{3} - 1$ とする.

△AOPと△BOPは3辺の長さがそれぞれ等しいから合同である.

よって $\angle AOP = \angle BOP$

ゆえに $\angle AOB = 2\angle AOP = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

したがって、△AOBは直角二等辺三角形である.

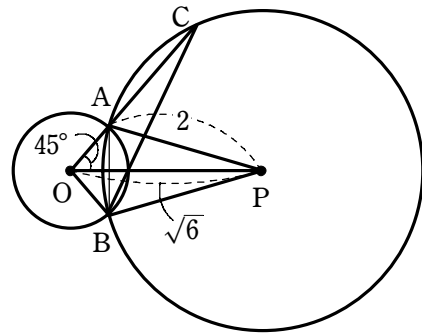
$$\text{よって } AB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

また、 $\angle OAB = 45^\circ$ であるから

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle OAB = 180^\circ - 45^\circ = \text{オカキ } 135^\circ$$

ここで、△ABCに正弦定理を用いると $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2AP$

$$\text{よって } BC = 2AP \sin \angle BAC = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ク } 2\sqrt{2}$$



58 [2004センター]

(1) $f(\theta) = 0$ とすると $\sin(\theta - a) = \sin \theta$

これを満たす角度 θ , $\theta - a$ は右の図のようになる

$$\text{から } \theta - a = 180^\circ - \theta$$

$$\text{ゆえに } \theta = \text{アイ } 90^\circ + \frac{a}{2}$$

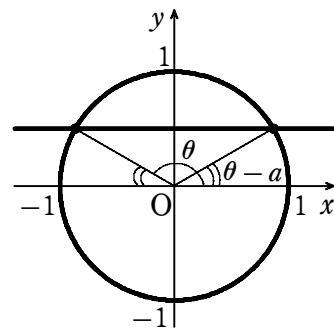
これが $\sin(\theta - a) = \frac{1}{2}$ を満たすとき

$$\sin\left(90^\circ + \frac{a}{2} - a\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{すなわち } \sin\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ よって } \cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \frac{a}{2} < 90^\circ \text{ であるから } \frac{a}{2} = 60^\circ$$

したがって $a = \text{ウエオ } 120^\circ$



(2) $a = 120^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin(\theta - 120^\circ) - \sin \theta = \sin \theta \cos 120^\circ - \cos \theta \sin 120^\circ - \sin \theta \\ &= -\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \sqrt{3} \sin(\theta - 150^\circ) \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $-150^\circ \leq \theta - 150^\circ \leq 30^\circ$

よって、右の図から $-1 \leq \sin(\theta - 150^\circ) \leq \frac{1}{2}$

ゆえに、 $f(\theta)$ は

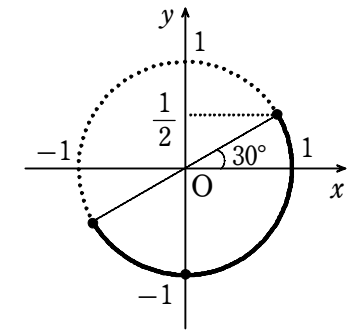
$\theta - 150^\circ = 30^\circ$ すなわち

$$\theta = \text{カキク } 180^\circ \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\theta - 150^\circ = -90^\circ$ すなわち

$$\theta = \text{サン } 60^\circ \text{ のとき最小値 } -\sqrt{3}$$

をとる.



別解 和 → 積の公式を利用すると

$$f(\theta) = \sin(\theta - a) - \sin \theta = 2 \cos \frac{2\theta - a}{2} \sin\left(\frac{-a}{2}\right) = -2 \cos \frac{2\theta - a}{2} \sin \frac{a}{2}$$

$$(1) f(\theta) = 0 \text{ とすると } -2 \cos \frac{2\theta - a}{2} \sin \frac{a}{2} = 0$$

$$0^\circ < \frac{a}{2} < 90^\circ \text{ であるから } \sin \frac{a}{2} \neq 0$$

$$\text{よって } \cos \frac{2\theta - a}{2} = 0$$

$$\text{ここで、 } -90^\circ < \frac{2\theta - a}{2} < 180^\circ \text{ であるから } \frac{2\theta - a}{2} = 90^\circ$$

$$\text{よって } \theta = 90^\circ + \frac{a}{2} \text{ (以下同様)}$$

$$(2) a = 120^\circ \text{ のとき } f(\theta) = -2 \cos \frac{2\theta - 120^\circ}{2} \sin 60^\circ = -\sqrt{3} \cos(\theta - 60^\circ)$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $-60^\circ \leq \theta - 60^\circ \leq 120^\circ$

よって、右の図から $-\frac{1}{2} \leq \cos(\theta - 60^\circ) \leq 1$

ゆえに、 $f(\theta)$ は

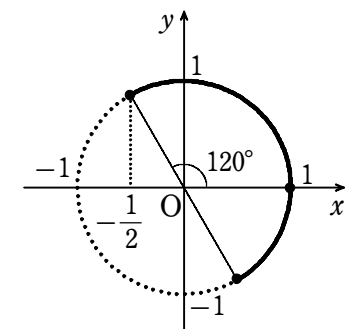
$\theta - 60^\circ = 120^\circ$ すなわち

$$\theta = 180^\circ \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta - 60^\circ = 0^\circ$ すなわち

$$\theta = 60^\circ \text{ のとき最小値 } -\sqrt{3}$$

をとる.



59 [2004センター]

$$\begin{aligned} \sin^2 \angle ABC &= 1 - \cos^2 \angle ABC \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より, $\sin \angle ABC > 0$ であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

また, $\triangle ABC$ に正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2AO$$

よって $AC = 2AO \sin \angle ABC$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 14$$

$AB = AC$ であるから, BC の中点を H とすると $AH \perp BC$

よって $BC = 2BH = 2AB \cos \angle ABC$

$$= 2 \cdot 14 \cdot \frac{3}{4} = 21$$

また, $\angle ABC = 2\angle ABD = \angle AOD$ であるから, $\triangle AOD$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot DO \cos \angle AOD \\ &= (4\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7} \cdot \frac{3}{4} = 56 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

更に, 四角形 $ABCD$ は円に内接しているから $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$

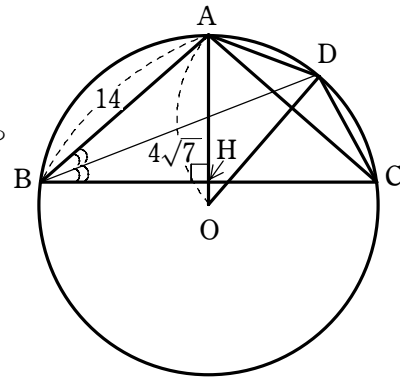
$$\text{よって } \sin \angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ここで, $\angle ACD = \angle ABD = \angle CBD = \angle CAD$ であるから, $\triangle ACD$ は $AD = CD$ の二等辺三角形である.

したがって $CD = 2\sqrt{14}$

よって, $\triangle ACD$ の面積は

$$\frac{1}{2} AD \cdot CD \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 7\sqrt{7}$$



60 [2004センター]

$$\begin{aligned} \sin^2 \angle ABC &= 1 - \cos^2 \angle ABC \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より, $\sin \angle ABC > 0$ であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

また, $\triangle ABC$ に正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2AO$$

よって $AC = 2AO \sin \angle ABC$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 14$$

更に, $\angle ABC = 2\angle ABD = \angle AOD$ であるから, $\triangle AOD$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot DO \cos \angle AOD \\ &= (4\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7} \cdot \frac{3}{4} = 56 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

また, $\triangle AOD$ の面積は

$$\frac{1}{2} AO \cdot DO \sin \angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 14\sqrt{7}$$

