1 〔2006南山大〕

関数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x-4}$ がある。方程式 $f(x)=x$ の解を求めよ。また，不等式 $f(x)\leqq x$ を解け。

(解説)

$$\frac{3-2x}{x-4}=x \iff x-\frac{3-2x}{x-4}=0 \iff \frac{(x+1)(x-3)}{x-4}=0$$
$$\iff (x+1)(x-3)=0,\ \ x-4\neq 0$$

よって，$\dfrac{3-2x}{x-4}=x$ の解は　　$x=-1,\ 3$

次に　$\dfrac{3-2x}{x-4}\leqq x \iff x-\dfrac{3-2x}{x-4}\geqq 0 \iff \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-4}\geqq 0$

$$\iff (x+1)(x-3)(x-4)\geqq 0,\ \ x-4\neq 0$$

$x+1$，$x-3$，$x-4$ の値の変化は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

ゆえに，$\dfrac{3-2x}{x-4}\leqq x$ の解は　　$-1\leqq x\leqq 3,\ 4<x$

2 〔2002近畿大〕

関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える．ただし，a，b，c は定数とする．

(1)　合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，$a=$ ア $\boxed{}$，$b=$ イ $\boxed{}$，$c=$ ウ $\boxed{}$ である．

(2)　関数 $y=(f\circ g)(x)$ の表す曲線を C とする．曲線 C が，双曲線 $y=\dfrac{9}{x}$ を平行移動したものであり，$x=-2$，$y=3$ を漸近線にもつとき，$a=$ エ $\boxed{}$，$b=$ オ $\boxed{}$，$c=$ カ $\boxed{}$ である．このとき，方程式 $f(x)-x-3=0$ の解は $x=$ キ $\boxed{}$，ク $\boxed{}$ であり，x が不等式 $g(x)+x+8\leqq 0$ を満たすための必要十分条件は $x\leqq$ ケ $\boxed{}$ または $-11<x\leqq$ コ $\boxed{}$ である．

(解説)

(1)　$f(g(x))=f\left(\dfrac{3x+b}{x+c}\right)=\dfrac{2\left(\dfrac{3x+b}{x+c}\right)+a}{\dfrac{3x+b}{x+c}+1}=\dfrac{(a+6)x+(2b+ac)}{4x+b+c}$

$f(g(x))=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ から　$a+6=9$ …… ①，$2b+ac=8$ …… ②，$b+c=3$ …… ③

①，②，③から　$a=3$，$b=1$，$c=2$

(2)　曲線 C の方程式は　$y=\dfrac{9}{x+2}+3=\dfrac{3x+15}{x+2}=\dfrac{12x+60}{4x+8}$

$f(g(x))=\dfrac{12x+60}{4x+8}$ から

$a+6=12$ …… ④，$2b+ac=60$ …… ⑤，$b+c=8$ …… ⑥

④，⑤，⑥から　$a=6$，$b=-3$，$c=11$

このとき　$f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}$ から　$\dfrac{2x+6}{x+1}=x+3$

ゆえに　$x^2+2x-3=0$ から　$x=1$，-3

また　$g(x)=\dfrac{3x-3}{x+11}=3+\dfrac{-36}{x+11}$

$y=g(x)$ と $y=-x-8$ との交点の x 座標は

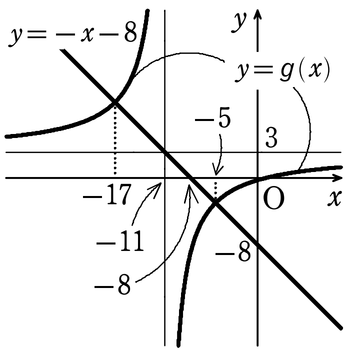
$\dfrac{3x-3}{x+11}=-x-8$ から　$(x+5)(x+17)=0$

よって　$x=-17$，-5

したがって，右図から，

$g(x)\leqq -x-8$ を満たす x の必要十分条件は

$x\leqq -17$，$-11<x\leqq -5$



3 [2001徳島大]

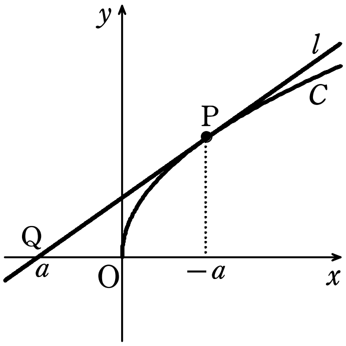
p を正の定数として，放物線 $y^2=4px$ の第1象限 $(x>0,\ y>0)$ にある部分を C とする．C 上の点 P における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q $(a,\ 0)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　接線 l の方程式を $y=m(x-a)$ として，l の傾き m を a，p を用いて表せ．

(2)　接点 P の座標を a，p を用いて表せ．

(3)　線分 PQ を $r:1$ $(r>0)$ の比に内分する点を R とする．点 P が C 上を動くとき，点 R はどのような図形を描くか．

解説



(1)　$\{m(x-a)\}^2=4px$ から

$m^2x^2-2(m^2a+2p)x+m^2a^2=0$ ……①

この方程式が重解をもてばよいから，判別式を D とおくと

$$D/4=(m^2a+2p)^2-m^4a^2=0$$

ゆえに　$4m^2ap+4p^2=0$

$a<0$，$p>0$ から　$m=\sqrt{-\dfrac{p}{a}}$

(2)　$m=\sqrt{-\dfrac{p}{a}}$ を①に代入して

$$-\frac{p}{a}x^2-2px-ap=0$$

ゆえに　$x^2+2ax+a^2=0$　　よって　$x=-a$

また，$y^2=4p(-a)$ から　$y=2\sqrt{-pa}$

したがって　$\mathrm{P}(-a,\ 2\sqrt{-pa})$

(3)　点 R $(x,\ y)$ とおくと，線分 PQ を $r:1$ に内分するから

[1]　$r\fallingdotseq 1$ のとき

$x=\dfrac{ra-a}{r+1}$ ……②，$y=\dfrac{2\sqrt{-pa}}{r+1}$ ……③

②，③から　$a=\dfrac{r+1}{r-1}x=-\dfrac{(r+1)^2}{4p}y^2$

ゆえに　$y^2=\dfrac{4p}{1-r^2}x$　よって，放物線の一部 $y^2=\dfrac{4p}{1-r^2}x$ $(y>0)$

[2]　$r=1$ とき

②，③から　$x=0$，$y=\sqrt{-pa}$

よって，半直線 $x=0$ $(y>0)$

4 〔2000愛知教育大〕

$x=2\cos^2\theta-4\sin^2\theta+3$，$y=10\sin\theta\cos\theta-1$ とする．

(1) 点 $(x,\ y)$ の軌跡の方程式を求め，概形を図示せよ．

(2) $2\cos^2\theta-4\sin^2\theta+3>0$ のとき，$10\sin\theta\cos\theta-1$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $2\cos^2\theta-4\sin^2\theta+3\leqq 0$ のとき，$10\sin\theta\cos\theta-1$ の最大値と最小値を求めよ．

解説

(1) $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2}$ であるから

$$x=2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}-4\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+3=3\cos2\theta+2 \cdots\cdots ①$$

$$y=10\cdot\frac{\sin2\theta}{2}-1=5\sin2\theta-1 \cdots\cdots ②$$

① から　$\cos2\theta=\dfrac{x-2}{3}$，　② から　$\sin2\theta=\dfrac{y+1}{5}$

ゆえに，$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$ から

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{5^2}=1$$

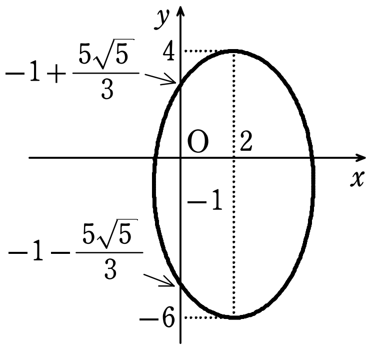
また，ここで $x=0$ とすると

$\dfrac{(-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y+1)^2}{5^2}=1$ から　$y=-1\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

よって，y 軸との交点の y 座標は　$-1\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

また $x=2$ とすると $\dfrac{(y+1)^2}{5^2}=1$ から　$y=-6,\ 4$

したがって，概形は右図．



(2) $x>0$ のとき，y のとりうる値の範囲は，(1) の図から　$-6\leqq y\leqq 4$

したがって，最大値 4，最小値 -6

(3) $x\leqq 0$ のとき，y のとりうる値の範囲は，(1) の図から

$$-1-\frac{5\sqrt{5}}{3}\leqq y\leqq -1+\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

したがって，最大値 $-1+\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$，最小値 $-1-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{5}$ 〔2002筑波大〕

a を正の実数とする．曲線 C_a を極方程式

$$r=2a\cos(a-\theta)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　C_a は円になることを示し，その中心と半径を求めよ．

(2)　C_a が直線 $y=-x$ に接するような a をすべて求めよ．

解説

(1)　$r=2a\cos(a-\theta)$

$$=2a\cos a\cos\theta+2a\sin a\sin\theta$$

ゆえに　$r^2=2ar\cos\theta\cos a+2ar\sin\theta\sin a$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ であるから

$$x^2+y^2=2ax\cos a+2ay\sin a$$

よって　$(x-a\cos a)^2+(y-a\sin a)^2=a^2$

したがって，$a>0$ から，中心 $(a\cos a,\ a\sin a)$，半径 a の円である．

(2)　中心 $(a\cos a,\ a\sin a)$ から直線 $x+y=0$ までの距離が a であればよい．

ゆえに　$\dfrac{|a\cos a+a\sin a|}{\sqrt{2}}=a$

$a>0$ から　$\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm1$

よって　$a+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$

したがって　$a=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$ (n は0以上の整数)

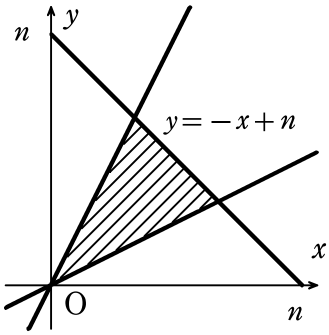
6 [2002前橋工科大]

不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x$，$y \leqq 2x$，$y \leqq -x+n$ を満たす xy 平面上の領域において，x 座標も y 座標も整数である点(格子点と呼ぶ)の個数を S_n とおく。ただし，n は整数とする。

(1)　S_{30} を求めよ．　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{3n}}{n^2}$ を求めよ．

解説

(1)　不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x$，$y \leqq 2x$，$y \leqq -x+n$ の表す領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$n=30$ のとき，$y=-x+30$ と $y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$ との交点の x 座標はそれぞれ，10 と 20 となる。

この領域の格子点の個数 S_{30} は

$$S_{30}=\sum_{k=0}^{10}(2k+1)+\sum_{k=11}^{20}(-k+30+1)-(1+1+2+2+\cdots+10+10)$$

$$=\sum_{k=0}^{10}(2k+1)+\sum_{k=1}^{20}(31-k)-\sum_{k=1}^{10}(31-k)-(1+1+2+2+\cdots+10+10)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+11+620-\frac{1}{2}\cdot20\cdot21-310+\frac{1}{2}\cdot10\cdot11-\frac{1}{2}\cdot10\cdot11\times2$$

$$=11+620-210-310+55=166$$

(2)　S_{3n} は(1)と同様にして，$y=-x+3n$ と $y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$ との交点の x 座標はそれぞれ，n と $2n$ となる。よって，

$$S_{3n}=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+\sum_{k=n+1}^{2n}(-k+3n+1)-(1+1+2+2+\cdots+n+n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+\sum_{k=1}^{2n}(3n+1-k)-\sum_{k=1}^{n}(3n+1-k)-(1+1+2+2+\cdots+n+n)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)+2n(3n+1)-\frac{1}{2}\cdot2n(2n+1)-n(3n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$-\frac{1}{2}n(n+1)\times2=(n+1)+n(3n+1)-\frac{1}{2}\cdot2n(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=n+1+3n^2+n-2n^2-n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{3n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{3}{2}$

$\boxed{7}$ 〔2001岡山理科大〕

無限級数 $x+\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x}{(1+x)^2}+\dfrac{x}{(1+x)^3}+\cdots\cdots$ $(x \neq -1)$ について，次の設問に答えよ．

(1)　無限級数が収束するような実数 x の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた x の範囲で，無限級数の和を $f(x)$ として，関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．

(解説)

(1)　初項 x，公比 $\dfrac{1}{1+x}$ の無限等比級数であるから，収束する条件は

$$x=0 \quad \text{または} \quad \left|\frac{1}{1+x}\right|<1$$

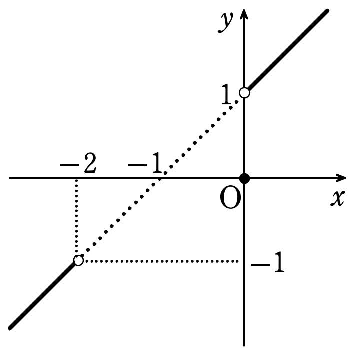
後半の条件は　$|1+x|>1$ から　$x<-2,\ 0<x$

ゆえに，求める x の範囲は　$x<-2,\ 0\leqq x$

(2)　$x<-2,\ 0<x$ のとき

$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}=1+x$$

$x=0$ のとき　$f(x)=0$　〔図〕



8 〔2006関東学院大〕

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=\dfrac{1}{3}a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であるとき

(1) $a_1=$ ア$\boxed{}$，$a_{n+1}=$ イ$\boxed{}$ a_n- ウ$\boxed{}$ である。

(2) 一般項 a_n を n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解説

(1) $a_1=\dfrac{1}{3}a_1-1$ から　　$a_1=$ ア $-\dfrac{3}{2}$

また　　$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{3}a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n-1$

よって　　$a_{n+1}=$ イ $-\dfrac{1}{2}a_n-$ ウ $\dfrac{3}{2}$

(2) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{3}{2}$ から　　$a_{n+1}+1=-\dfrac{1}{2}(a_n+1)$

数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 $a_1+1=-\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n+1=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　　　　よって　　$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1$

(3) (2) から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-1$

$\boxed{9}$ 〔2000金沢大〕

実数 $x \fallingdotseq 0$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = x,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1)　$x \fallingdotseq -1$ のとき，$b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ．また，b_n を x の式で表せ．

(2)　各 x ($\fallingdotseq 0$) に対して，$\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

解説

(1)　$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) + 1} = \frac{{a_n}^2 - 2a_n + 1}{{a_n}^2 + 2a_n + 1} = \frac{(a_n - 1)^2}{(a_n + 1)^2} = {b_n}^2$$

よって　$b_n = {b_{n-1}}^2 = {b_{n-2}}^4 = \cdots\cdots = {b_1}^{2^{n-1}} = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2^{n-1}}$

(2)　$b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ から　$a_n = \dfrac{1 + b_n}{1 - b_n}$

[1]　$x > 0$ のとき

$|x+1| > |x-1|$ であるから　$b_n \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$)

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + b_n}{1 - b_n} = 1$

[2]　$x < -1$，$-1 < x < 0$ のとき

$|x+1| < |x-1|$ であるから　$b_n \longrightarrow \infty$ ($n \longrightarrow \infty$)

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{b_n} + 1}{\frac{1}{b_n} - 1} = -1$

[3]　$x = -1$ のとき　$a_n = -1$　　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

以上から　$x > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$x < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

10 〔2002東北学院大〕

$\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}=84$ となるような a，b の値は $(a,\ b)=\boxed{}$ である．

(解説)

$\displaystyle\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}-2)=0$ であるから，極限値が存在するためには，

$\displaystyle\lim_{x\to 8}(ax^2+bx+8)=64a+8b+8=0$ であることが必要．

ゆえに　$b=-8a-1$ …… ①

このとき

$$\begin{aligned}
与式&=\lim_{x\to 8}\frac{ax^2-(8a+1)x+8}{\sqrt[3]{x}-2}\\
&=\lim_{x\to 8}\frac{(ax-1)(x-8)}{\sqrt[3]{x}-2}\\
&=\lim_{x\to 8}(ax-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\\
&=12(8a-1)=84
\end{aligned}$$

よって　$a=1$　　① から　$b=-9$

このとき，逆も成り立つ．

したがって　$(a,\ b)=(1,\ -9)$

$\boxed{11}$ [2005鳥取大]

関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で，$a>0$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。

(2)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。

(3)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たし，関数 $f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(解説)

(1)　[1]　$-1<x<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=-x^2+bx+c$

[2]　$x=-1$ のとき　$f(-1)=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

[3]　$x=1$ のとき　$f(1)=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

[4]　$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{c}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{a}{x}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ において，それぞれ連続である。したがって，$f(x)$ が x の連続関数となるための条件は，$x=-1$ および $x=1$ で連続であることである。

よって　$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)$　かつ　$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$-a=-1-b+c=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$，$-1+b+c=a=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

したがって　$a=b$，$c=1$

(2)　(1) の結果により

$-1<x<1$ のとき　$f(x)=-x^2+ax+1=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+1+\dfrac{a^2}{4}$

$x=-1$ のとき　$f(-1)=-a$

$x=1$ のとき　$f(1)=a$

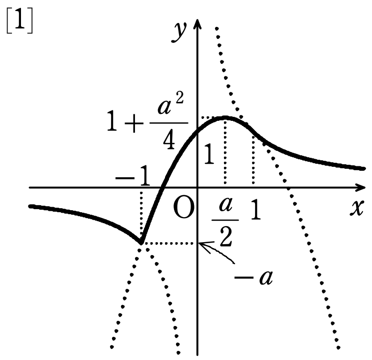
$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\dfrac{a}{x}$

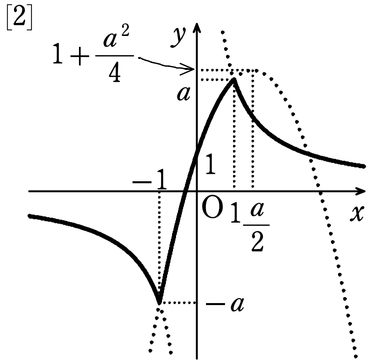
[1]　$0<\dfrac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のとき　グラフは図 [1] のようになる。

よって　$x=\dfrac{a}{2}$ のとき最大値 $1+\dfrac{a^2}{4}$

[2]　$1 \leqq \dfrac{a}{2}$ すなわち $2 \leqq a$ のとき　グラフは図 [2] のようになる。

よって　$x=1$ のとき最大値 a





(3)　[1]　$0<a<2$ のとき

最大値が $\dfrac{5}{4}$ となる条件は　$1+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5}{4}$

すなわち　$a^2=1$

$0<a<2$ であるから　$a=1$

これと (1) の結果により　$a=1$，$b=1$，$c=1$

[2]　$2 \leqq a$ のとき

最大値が $\dfrac{5}{4}$ となる条件は　$a=\dfrac{5}{4}$

これは $2 \leqq a$ を満たさないから不適。

以上から　$a=1$，$b=1$，$c=1$

12 〔2000鳥取大〕

関数 $f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha x & (x\geqq 2) \\ \beta x^2-\alpha x & (x<2) \end{cases}$ が

$x=2$ で微分可能となるような α，β の値を求めよ．

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能となるための必要十分条件は，

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ が存在することである．

$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続である．

よって　$$\lim_{x\to 2+0}(x^3+\alpha x)=\lim_{x\to 2-0}(\beta x^2-\alpha x)=f(2)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2+0}(x^3+\alpha x)=f(2)=8+2\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}(\beta x^2-\alpha x)=4\beta-2\alpha$ であるから

$$8+2\alpha=4\beta-2\alpha$$　ゆえに　$\beta-\alpha=2$　……①

また　$$\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3+\alpha x-(8+2\alpha)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+0}(x^2+2x+4+\alpha)=\alpha+12$$

①を用いて　$$\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(2+\alpha)x^2-\alpha x-(8+2\alpha)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-0}\{(2+\alpha)x+4+\alpha\}=3\alpha+8$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ が存在することから　$\alpha+12=3\alpha+8$

これを解いて　$\alpha=2$　　① から　$\beta=4$

答　$\alpha=2$，$\beta=4$

$\boxed{13}$〔1999神戸大〕

x の整式 $f(x)$ が

$$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)=0,\quad f(0)=1$$

を満たすとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の次数を求めよ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

(解説)

(1)　$f(x)$ が定数であると仮定すると，第 1 式から $f(x)=0$ となるが，第 2 式の $f(0)=1$ を満たさないから，不適．

ゆえに，$f(x)$ の最高次の項を ax^n ($n\geqq 1$，$a\neq 0$) とすると，$f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1} であるから，$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)$ の最高次の項は $-nax^n+3ax^n$ となり　$(-n+3)a=0$　　よって　$n=3$

したがって，$f(x)$ の次数は 3 である．

(2)　$f(0)=1$ より，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ とおけるから

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

これらを与式に代入して整理すると

$$(9a+b)x^2+(4b+2c)x+c+3=0$$

ゆえに　$9a+b=0$，$4b+2c=0$，$c+3=0$

よって　$a=-\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=-3$

したがって　$f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$

$\boxed{14}$ [2002大阪市立大]

関数 $y=f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする．このとき，実数 a，b，t $(a<b,\ 0\leqq t\leqq 1)$ について，不等式

$$f((1-t)a+tb)\leqq(1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，どのような場合か．

(解説)

$0<t<1$ のとき，平均値の定理により

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{(1-t)a+tb-a}=f'(c_1)$$

すなわち　$\dfrac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)}=f'(c_1)$　$(a<c_1<(1-t)a+tb)$ …… ①

を満たす c_1 と，

$$\frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{b-\{(1-t)a+tb\}}=f'(c_2)$$

すなわち　$\dfrac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}=f'(c_2)$　$((1-t)a+tb<c_2<b)$ …… ②

を満たす c_2 が存在する．

仮定により，$f'(x)$ は単調に増加する．

$c_1<c_2$ であるから　$f'(c_1)<f'(c_2)$

ゆえに，①，② から　$\dfrac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)}<\dfrac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$

よって　$f((1-t)a+tb)<(1-t)f(a)+tf(b)$

また，$t=0$，$t=1$ のとき，等号が成り立つことは明らかである．

したがって，与えられた不等式は成り立つ．

15 〔2006工学院大〕

曲線 C_1 : $y=2\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 C_2 : $y=\cos 2x+k$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 ℓ をもつ。ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする。k の値と接線 ℓ の方程式を求めよ。

解説

$y=2\cos x$ から　　$y'=-2\sin x$

$y=\cos 2x+k$ から　　$y'=-2\sin 2x$

共有点 P の x 座標を $t\,(t>0)$ とする。

共有点 P で共通の接線をもつから

$$-2\sin t=-2\sin 2t \quad \cdots\cdots ①,\qquad 2\cos t=\cos 2t+k \quad \cdots\cdots ②$$

① から　　$\sin t=2\sin t\cos t$

$0<t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin t \fallingdotseq 0$

ゆえに　　$\cos t=\dfrac{1}{2}$　　　よって　$t=\dfrac{\pi}{3}$

これを ② に代入して　　$1=-\dfrac{1}{2}+k$　　　ゆえに　$k=\dfrac{3}{2}$

また，接線 ℓ の方程式は　　$y-2\cos t=-2\sin t\times(x-t)$

よって　　$y=-\sqrt{3}\,x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$

$\boxed{16}$〔2006弘前大〕

関数 $y=\dfrac{x-1}{x^2}$ の増減やグラフの凹凸などを調べ，グラフの概形をかけ。

解説

$y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ であるから　　$y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2-x}{x^3}$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

$y''=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}=\dfrac{2x-6}{x^4}$ であるから，$y''=0$ とすると　　$x=3$

y の増減，凹凸 は次の表のようになる。

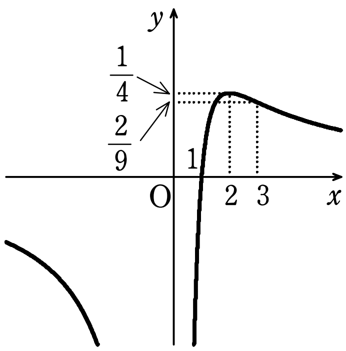
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	/	$\nearrow$	極大 $\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	変曲点 $\dfrac{2}{9}$	$\searrow$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to 0} y=-\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} y=0$

更に $y=0$ とすると　　$x=1$

よって，グラフは右の図のようになる。



17 〔2006京都工芸繊維大〕

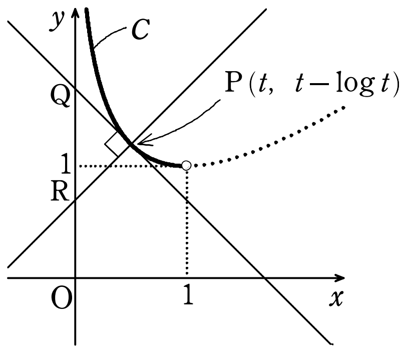
xy 平面において，曲線 C：$y=x-\log x$ $(0<x<1)$ と C 上の点 P を考える。P における C の接線と y 軸との交点を Q とし，P における C の法線と y 軸との交点を R とする。点 P が C 上を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。

(解説)

$y'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

P$(t,\ t-\log t)$ $(0<t<1)$ とおくと，P における接線の方程式は

$$y-(t-\log t)=\frac{t-1}{t}(x-t)$$



$x=0$ とすると　　$y-(t-\log t)=-(t-1)$

よって　　$y=1-\log t$

ゆえに　　Q$(0,\ 1-\log t)$

また，P における法線の方程式は

$$y-(t-\log t)=-\frac{t}{t-1}(x-t)$$

$x=0$ とすると　　$y-(t-\log t)=\dfrac{t^2}{t-1}$

よって　　$y=\dfrac{2t^2-t}{t-1}-\log t$　　　ゆえに　　R$\left(0,\ \dfrac{2t^2-t}{t-1}-\log t\right)$

よって，$f(t)=(1-\log t)-\left(\dfrac{2t^2-t}{t-1}-\log t\right)$ とすると

$$f(t)=\frac{-2t^2+2t-1}{t-1}=-2t-\frac{1}{t-1}$$

ゆえに　　$f'(t)=-2+\dfrac{1}{(t-1)^2}=\dfrac{-(2t^2-4t+1)}{(t-1)^2}$

$f'(t)=0$ とすると，$0<t<1$ から　　$t=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	

よって，$f(t)$ は $t=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $2(\sqrt{2}-1)$ をとるから，線分 QR の長さの最小値は $2(\sqrt{2}-1)$ である。

$\boxed{18}$ 〔2004福島大〕

x に関する方程式 $(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，a は定数であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ とする．

(解説)

方程式を変形すると　$(-x^2-2x+2)e^{-x}=a$

$f(x)=(-x^2-2x+2)e^{-x}$ とおく．

$f'(x)=(-2x-2)e^{-x}+(x^2+2x-2)e^{-x}=(x+2)(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2e^2$	$\searrow$	$-\dfrac{6}{e^2}$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$$

$x=-t$ とおくことにより　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}t^2e^t\left(-1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}\right)=-\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

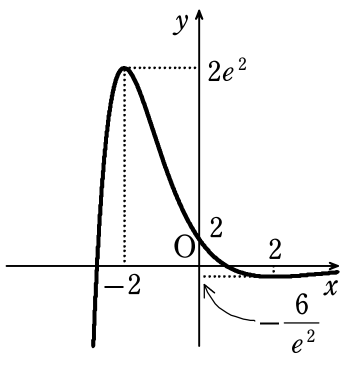
方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて

$a>2e^2$ のとき 0 個；

$a=2e^2$，$a<-\dfrac{6}{e^2}$ のとき 1 個；

$a=-\dfrac{6}{e^2}$，$0\leqq a<2e^2$ のとき 2 個；

$-\dfrac{6}{e^2}<a<0$ のとき 3 個



19 〔1998岡山理科大〕

すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ．ただし，$\log x$ は自然対数である．

解説

$x>0$ より，$k \geqq \dfrac{\log x}{x^2} \cdots$① を満たすような定数 k の最小値を求めればよい。

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$f'(x)=0$ とおくと，$\log x=\dfrac{1}{2}$　$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

増減表を書くと右図のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極大かつ最大となる。$f(\sqrt{e})=\dfrac{\log\sqrt{e}}{e}=\dfrac{1}{2e}$

ゆえに，①がすべての正の数 x で成り立つような定数 k の最小値は $\dfrac{1}{2e}$

別解　$f(x)=kx^2-\log x$ とおく．$f'(x)=\dfrac{2kx^2-1}{x}$

$k \leqq 0$ のとき，例えば $f(2)=4k-\log 2<0$ で条件を満たさない．

$k>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{\dfrac{1}{2k}}$ (>0)

$f(x)$ の増減を調べると，$f(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{1}{2k}}$ で極小かつ最小となる．

求める条件は　$f\left(\sqrt{\dfrac{1}{2k}}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log 2k \geqq 0$　　ゆえに　$k \geqq \dfrac{1}{2e}$

よって，k のうちで最小のものは　$\dfrac{1}{2e}$　答

$\boxed{20}$〔2003日本大〕

不定積分 $\displaystyle\int e^{-2x}\sin 2x\,dx$ を求めよ。

(解説)

与式$=I$ とおく.

$$I=\int e^{-2x}\sin 2x\,dx=\int\left(\frac{1}{-2}e^{-2x}\right)'\sin 2x\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2\cos 2x\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\sin 2x+\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\cos 2x\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\sin 2x+\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-2\sin 2x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(\sin 2x+\cos 2x)-\int e^{-2x}\sin 2x\,dx$$

ゆえに　$2I=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)+C'$

よって　$I=-\dfrac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)+C$ (Cは積分定数)

21 〔2004埼玉大〕

整数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$ とおく．

⑴　I_0，I_1，I_2 を求めよ．

⑵　I_n を I_{n-2} で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(解説)

⑴　$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$

⑵　$n\geqq 2$ のとき

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin x)'dx$

$=\Big[\cos^{n-1}x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos^{n-1}x)'dx=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

よって　$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

移項して　$nI_n=(n-1)I_{n-2}$

ゆえに　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

$\boxed{22}$ 〔2003上智大〕

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とし，$S(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-a|\sin x\,dx$ とおく。$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解説

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ より，$|x-a|=\begin{cases} x-a\ (a\leqq x) \\ -x+a\ (x<a) \end{cases}$ とあわせて

$$S(a)=\int_0^a(-x+a)\sin x\,dx+\int_a^{\frac{\pi}{2}}(x-a)\sin x\,dx$$

$$=\Big[(-x+a)(-\cos x)\Big]_0^a-\int_0^a(-1)(-\cos x)dx+\Big[(x-a)(-\cos x)\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}-\int_a^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$$

$$=0-a(-1)-\Big[\sin x\Big]_0^a+0-0+\Big[\sin x\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=a-2\sin a+1$$

$S'(a)=1-2\cos a$　$S'(a)=0$ とおくと，$\cos a=\dfrac{1}{2}$　$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ より，$a=\dfrac{\pi}{3}$

増減表を書くと右図。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ は，$a=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，極小かつ最小となる。

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}+1=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$$

23 〔2001広島大〕

関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して $f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(0)$ の値を求め，更に，$f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\{e^x f(x)\}'=2xe^x$ を示せ．

(3)　$f(x)$ を求めよ．

解説

(1)　$f(x)=x^2-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt$ …… ①

①において，$x=0$ を代入すると　$f(0)=0$

①の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt-xf'(x)+xf'(x)$$

$$=2x-\int_0^x f'(t)\,dt=2x-\Big[f(t)\Big]_0^x$$

$$=2x-f(x)+f(0)=2x-f(x)$$

(2)　$\{e^x f(x)\}'=e^x f(x)+e^x f'(x)$

$$=e^x\{f(x)+f'(x)\}=2xe^x$$

(3)　$e^x f(x)=\int 2xe^x\,dx=2xe^x-2\int e^x\,dx$

$$=2(x-1)e^x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

$f(0)=0$ であるから　$f(0)=-2+C=0$

ゆえに　$C=2$

よって　$e^x f(x)=2(x-1)e^x+2$

したがって　$f(x)=2(e^{-x}+x-1)$

24 〔2004横浜市立大〕

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx$ の値を求めよ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(解説)

(1)　$\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$　（C は積分定数）

よって　$\displaystyle\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx = \int_0^1\{\log(x+2)-\log(x+1)\}dx$

$$=\Big[(x+2)\log(x+2)-(x+2)-\{(x+1)\log(x+1)-(x+1)\}\Big]_0^1$$

$$=\Big[(x+2)\log(x+2)-(x+1)\log(x+1)-1\Big]_0^1$$

$$=(3\log 3-2\log 2-1)-(2\log 2-1)=3\log 3-4\log 2$$

$$=\log\frac{3^3}{2^4}=\log\frac{27}{16}$$

(2)　$\displaystyle f(n)=\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると

$$\log\left\{\lim_{n\to\infty}f(n)\right\}=\lim_{n\to\infty}\{\log f(n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot(n+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}\,dx=\log\frac{27}{16}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{27}{16}$

25 [1999高知女子大]

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x$ を証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \{x-\log(1+x)\}dx$ および $\displaystyle\int_0^1 \left\{\log(1+x)-\frac{x}{1+x}\right\}dx$ の値を求め，e の値について，

$2\sqrt[3]{2} < e < 2\sqrt{2}$ を示せ。

(解説)

(1)　$f(x)=\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{x'(1+x)-x(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)-1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2} \geqq 0\ (\because 0 \leqq x \leqq 1)$$

よって，$f(x) \geqq f(0)=0$ …①

$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)-1}{1+x}=\frac{x}{1+x} \geqq 0\ (\because 0 \leqq x \leqq 1)$$

よって，$g(x) \geqq g(0)=0$ …②

①，②より，与えられた不等式が証明された。

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \{x-\log(1+x)\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1$

$$=\frac{1}{2}-\{2\log 2-2-(0-1)\}=\frac{3}{2}-2\log 2 > 0\ (\because (1)) \cdots ①$$

$$\int_0^1 \left\{\log(1+x)-\frac{x}{1+x}\right\}dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\{2\log 2-2-(0-1)\}-\Big[x-\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\{2\log 2-2-(0-1)\}-\{1-\log 2-(0-0)\}=3\log 2-2 > 0\ (\because (1)) \cdots ②$$

①，②より，$\dfrac{2}{3} < \log 2 < \dfrac{3}{4}$　底 $e>1$ だから，$e^{\frac{2}{3}} < 2 < e^{\frac{3}{4}}$

よって，$2^{\frac{4}{3}} < e < e^{\frac{3}{2}}$　ゆえに，$2\sqrt[3]{2} < e < 2\sqrt{2}$

26 〔2002北見工業大〕

$a>0$ とし，$y=x^2$ のグラフが $y=a\log x$ のグラフに接しているとする．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=a\log x$ と x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ．

解説

(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=a\log x$ とすると

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{a}{x}$$

$x=t$ で $y=x^2$ と $y=a\log x$ のグラフが接するとすると

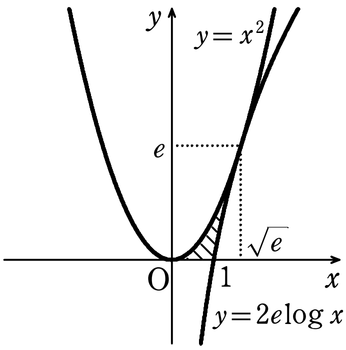
$t^2=a\log t$ …… ①，$2t=\dfrac{a}{t}$ …… ②

② から　$t^2=\dfrac{a}{2}$　　① から　$\dfrac{a}{2}=a\log t$

よって，$a>0$ より　$\log t=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$　　$a=2t^2=2e$

(2)　求める面積を S とおくと



$$S=\int_0^e\left(e^{\frac{y}{2e}}-\sqrt{y}\right)dy$$

$$=\left[2e\cdot e^{\frac{y}{2e}}-\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^e$$

$$=2e\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)-\frac{2}{3}\sqrt{e^3}$$

$$=2e^{\frac{3}{2}}-2e-\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}-2e$$

$\boxed{27}$ 〔2000愛知工大〕

曲線 $y=e^x$ と 3 つの直線 $y=x$，$x=t$，$x=t+1$ で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を t の式で表せ。

(2)　$S(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解説

(1)　$S(t)=\int_t^{t+1}(e^x-x)dx=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}=e^{t+1}-\frac{1}{2}(t+1)^2-\left(e^t-\frac{1}{2}t^2\right)$

$=(e-1)e^t-t-\frac{1}{2}$

(2)　$S'(t)=(e-1)e^t-1$　$S'(t)=0$ とおくと，$e^t=\frac{1}{e-1}$　$t=\log\frac{1}{e-1}=-\log(e-1)$

増減表を書くと右図。

t	$\cdots$	$-\log(e-1)$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$S(t)$ は，$t=-\log(e-1)$ のとき，極小かつ最小となる。

$S(-\log(e-1))=(e-1)e^{-\log(e-1)}-(-\log(e-1))-\frac{1}{2}$

$=(e-1)\cdot\frac{1}{e-1}+\log(e-1)-\frac{1}{2}=\log(e-1)+\frac{1}{2}$

28 〔2003岐阜大〕

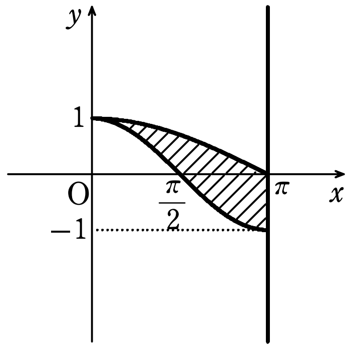
xy 平面上の 2 つの曲線 $y=\cos\dfrac{x}{2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　上の 2 つの曲線，および直線 $x=\pi$ を描き，これらで囲まれる領域を斜線で示せ．

(2)　(1)で示した斜線部の領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ

(解説)

(1)　右図のようになる．



(2)　求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$$

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$，$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$，

$I_3=\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$ とおく．

$\dfrac{x}{2}=\theta$ とおくと　$dx=2d\theta$

区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ に区間 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ が対応する．

ゆえに

$$I_1=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot 2d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$I_3=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって　$V=\pi\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)=\pi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\dfrac{\pi(2\pi+3\sqrt{3})}{8}$

29 〔2006東京理科大〕

曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ について，$y \leqq 5$ の部分の長さを求めよ。ただし，e は自然対数の底である。また，曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さは $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて，定積分 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ で表される。

解説

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$f(x) \leqq 5$ とすると　　$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \leqq 5$　　すなわち　　$(e^x)^2-10e^x+1 \leqq 0$

ゆえに　　$5-2\sqrt{6} \leqq e^x \leqq 5+2\sqrt{6}$

よって　　$\log(5-2\sqrt{6}) \leqq x \leqq \log(5+2\sqrt{6})$

求める曲線の長さを l とし，$a=\log(5-2\sqrt{6})$，$b=\log(5+2\sqrt{6})$ とすると

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_a^b \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_a^b$$

ここで　　$\Big[e^x-e^{-x}\Big]_a^b=\left\{e^{\log(5+2\sqrt{6})}-e^{-\log(5+2\sqrt{6})}\right\}-\left\{e^{\log(5-2\sqrt{6})}-e^{-\log(5-2\sqrt{6})}\right\}$

$$=\left(5+2\sqrt{6}-\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)-\left(5-2\sqrt{6}-\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\right)=8\sqrt{6}$$

したがって　　$l=4\sqrt{6}$

30 〔神奈川大〕

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x(2y-1)$ を初期条件「$x=0$ のとき $y=1$」のもとで解け。

(解説)

[1]　定数関数 $y=\dfrac{1}{2}$ は，初期条件を満たさないから，適さない。

[2]　$y\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{2y-1}\cdot\dfrac{dy}{dx}=x$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{2y-1}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int xdx$

左辺に置換積分法の公式を用いると　$\displaystyle\int\frac{1}{2y-1}dy=\int xdx$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\log|2y-1|=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$　(C_1 は任意定数)

よって　$\log|2y-1|=x^2+2C_1$

したがって　$2y-1=\pm e^{2C_1}e^{x^2}$

すなわち　$y=\dfrac{1}{2}\left(Ce^{x^2}+1\right)$　$\left(C=\pm e^{2C_1}\right)$

$x=0$ のとき，$y=1$ であるから　$1=\dfrac{1}{2}(C+1)$

よって　$C=1$

したがって　$y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x^2}+1\right)$

[1]，[2] から，求める解は　$y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x^2}+1\right)$

31

実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} x & x-3 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ が $A^2-7A+12E=O$ を満たすとき，x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．ただし，E，O はそれぞれ 2 次の単位行列，零行列である．

解説

ハミルトン・ケーリーの定理から　$A^2-(x+y)A+xyE=O$

よって，条件 $A^2=7A-12E$ を代入すると　$7A-12E-(x+y)A+xyE=O$

ゆえに　$(x+y-7)A=(xy-12)E$ …… ①

[1]　$x+y=7$ のとき

① から　$xy=12$

よって，x，y は t の 2 次方程式 $t^2-7t+12=0$ の解.

ゆえに　$(x,\ y)=(4,\ 3),\ (3,\ 4)$

[2]　$x+y\neq 7$ のとき

$A=kE$ とおける.

よって　$\begin{pmatrix} x & x-3 \\ 0 & y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

成分を比較すると　$x=k$，$x-3=0$，$y=k$　　ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 3)$

以上から　$(x,\ y)=(4,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 3)$

$\boxed{32}$ 〔2006甲南大〕

2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^5=O$ を満たすとする。ただし，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(1)　A の逆行列が存在しないことを示せ。　(2)　$A^2=(a+d)A$ となることを示せ。

(3)　$A^2=O$ であることを示せ。　(4)　$A+E$ が逆行列をもつことを示せ。

解説

(1)　A の逆行列 A^{-1} が存在すると仮定すると，

$A^5=O$ の両辺に右から $(A^{-1})^5$ を掛けて

$A^5(A^{-1})^5=O(A^{-1})^5$

よって，$E=O$ となり矛盾する。

したがって，A^{-1} は存在しない。

(2)　(1) より A^{-1} は存在しないから　$ad-bc=0$

よって，$bc=ad$ から

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}=(a+d)A$$

(3)　(2) から　$A^5=(a+d)A^4=(a+d)^2A^3=(a+d)^3A^2=(a+d)^4A$

よって，$A^5=O$ から　$(a+d)^4=0$ または $A=O$

[1]　$(a+d)^4=0$ のとき　$a+d=0$

よって，(2) から　$A^2=0A=O$

[2]　$A=O$ のとき　$A^2=O$

[1]，[2] から　$A^2=O$

(4)　$A^2=O$ から　$E-A^2=E$

よって　$(E+A)(E-A)=E$

したがって，$A+E$ は逆行列 $E-A$ をもつ。

$\boxed{33}$〔2001埼玉大〕

2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1)　$a_n + b_n$を求めよ．

(2)　a_n　および　b_nを求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$　および　$\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ．

(解説)

(1)　$a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{2}{3}b_n$，$b_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{3}b_n$

ゆえに　$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

よって　$a_n + b_n = \cdots\cdots = a_1 + b_1 = 1$

(2)　$a_n + b_n = 1$から　$b_n = -a_n + 1$　なので，$a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{2}{3}(-a_n+1) = -\frac{1}{15}a_n + \frac{2}{3}$

$a_{n+1} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{15}\left(a_n - \frac{5}{8}\right)$　ゆえに　$a_n - \frac{5}{8} = \left(1 - \frac{5}{8}\right)\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1}$

よって　$a_n = \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}$　ゆえに　$b_n = -a_n + 1 = -\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{8}$

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\right\} = \frac{5}{8}$　$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{8}\right\} = \frac{3}{8}$

$\boxed{34}$〔2006津田塾大〕

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{129}$$ を求めよ。

(解説)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$ と表される。

これは原点を中心として60°だけ回転する1次変換を表す行列であるから

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{129} = \begin{pmatrix} \cos(129\times 60^\circ) & -\sin(129\times 60^\circ) \\ \sin(129\times 60^\circ) & \cos(129\times 60^\circ) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(43\times 180^\circ) & -\sin(43\times 180^\circ) \\ \sin(43\times 180^\circ) & \cos(43\times 180^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{35}$［東北工業大］

行列 $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について

(1)　f によって動かない点を求めよ。

(2)　f によって自分自身に移される直線を求めよ。

(解説)

(1)　求める点の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から　　$x=6x+y,\ y=5x+2y$

したがって　　$5x+y=0$

よって，求める点は　点 $(t,\ -5t)$（t は任意の実数）

(2)　[1]　求める直線を $x=k$　(k は実数) とすると，直線上の任意の点は $(k,\ t)$　(t は実数) と表される。

$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6k+t \\ 5k+2t \end{pmatrix}$ であるから，点 $(k,\ t)$ は点 $(6k+t,\ 5k+2t)$ に移される。

この点も直線 $x=k$ 上にあるから　　$6k+t=k$

t は任意の実数であるから，これは不適。

[2]　求める直線を $y=mx+n$ とすると，直線上の任意の点は $(t,\ mt+n)$　(t は実数) と表される。

$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+6)t+n \\ (2m+5)t+2n \end{pmatrix}$ であるから，点$(t,\ mt+n)$ は

点 $((m+6)t+n,\ (2m+5)t+2n)$ に移される。

この点も直線 $y=mx+n$ 上にあるから　　$(2m+5)t+2n=m(m+6)t+mn+n$

これが t の恒等式であるから　$2m+5=m(m+6),\ 2n=mn+n$

整理すると　　$m^2+4m-5=0$　…… ①，$n(m-1)=0$　…… ②

① を解くと　　$m=1,\ -5$

これと ② から　$m=1$，n は任意の実数　または　$m=-5,\ n=0$

[1]，[2] から，求める直線は　$y=x+n$（n は任意の実数)，$y=-5x$