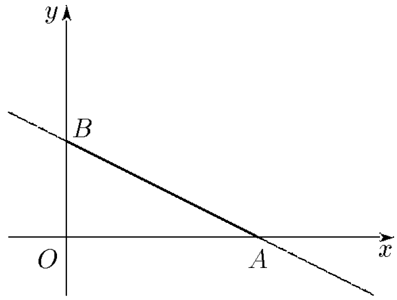
アステロイド (asteroid:星芒形)　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \quad \cdots$ ①において，両軸との交点の座標を $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$ とする。
線分 AB の長さが 1 (一定) で点 A は x 軸上を，点 B は，y 軸上を動くとき，
線分 AB が通過する領域を求めよ。$\Longrightarrow$ その境界線をアステロイド (星芒形) という。



解説　$a^2+b^2=1$ より，$a=\cos\theta, b=\sin\theta$ とおける。　$\cdots$ ②
線分 BA を $t:(1-t)$ の比に内分する点を $P(X,Y)$ とおくと，
$X=ta$，$Y=(1-t)b$ となる。
②を用いて，$X=t\cos\theta$，$Y=(1-t)\sin\theta \quad \cdots$ ③
ここで，③をそれぞれ θ について微分すると，

$$\frac{dX}{d\theta}=-t\sin\theta,\quad \frac{dY}{d\theta}=(1-t)\cos\theta$$

以上より，$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dX}{d\theta}}=\dfrac{(1-t)\cos\theta}{-t\sin\theta} \quad \cdots$ ④

また，点は $P(X,Y)$ 直線①上の点なので，$\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}=1$ を満たす。

この式から，$\dfrac{dY}{dX}=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cdots$ ⑤

④＝⑤より，$\dfrac{(1-t)\cos\theta}{-t\sin\theta}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

分母を払って整理すると，$t\sin^2\theta=(1-t)\cos^2\theta \quad t=\cos^2\theta$
③に代入して，$X=\cos^3\theta$，$Y=\sin^3\theta$ と表すことができる。
θ を消去すると，$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=1$　よって，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$: **アステロイドの式**

別解　直線 $\dfrac{x}{\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=1 \quad \cdots$ ⑥の包絡線を求めるために，

> **＜包絡線＞**とは，与えられたすべての曲線群に接するような曲線のこと。
> 例 : 直線群 $y=2tx-t^2$ の包絡線は，$t^2-2xt+y=0$ の両辺を t について微分すると，
> $2t-2x=0$　これより，$t=x$ をもとの式に代入して，$y=2tx-t^2=x^2$: これが包絡線！

⑥の両辺を θ について微分すると，$\dfrac{x\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{y\cos\theta}{\sin^2\theta}=0 \quad \cdots$ ⑦

⑦より，$y=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}x$　⑥に代入して，$x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$

以上から，θ を消去すると，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$