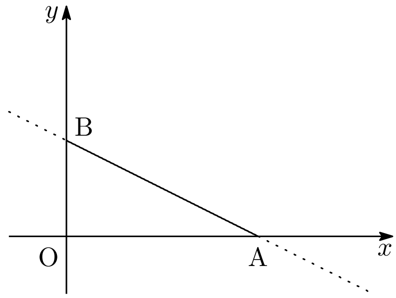
アステロイド (asteroid:星芒形)　___ 組 ___ 番　氏名 ____________

1　直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　$\cdots$　① において，両軸との交点の座標を A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$ とする。
線分 AB の長さが 1 (一定) で点 A は x 軸上を，点 B は，y 軸上を動くとき，
線分 AB が通過する領域を求めよ。$\Longrightarrow$ その境界線をアステロイド (星芒形) という。



$\boxed{\text{解説}}$　$a^2+b^2=1$ より，$a=\cos\theta, b=\sin\theta$ とおける。　$\cdots$　②

線分 BA を $t:(1-t)$ の比に内分する点を P(X, Y) とおくと，

$X=ta$，$Y=(1-t)b$ となる。

② を用いて，$X=t\cos\theta$，$Y=(1-t)\sin\theta$　$\cdots$　③

ここで，③ をそれぞれ θ について微分すると，

$$\frac{dX}{d\theta}=-t\sin\theta,\quad \frac{dY}{d\theta}=(1-t)\cos\theta$$

以上より，$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{\dfrac{dY}{d\theta}}{\dfrac{dX}{d\theta}}=\dfrac{(1-t)\cos\theta}{-t\sin\theta}$　$\cdots$　④

また，点は P(X, Y) 直線 ① 上の点なので，$\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}=1$ を満たす。

この式から，$\dfrac{dY}{dX}=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　$\cdots$　⑤

④ = ⑤ より，$\dfrac{(1-t)\cos\theta}{-t\sin\theta}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

分母を払って整理すると，$t\sin^2\theta=(1-t)\cos^2\theta$　　$t=\cos^2\theta$

③ に代入して，$X=\cos^3\theta$，$Y=\sin^3\theta$ と表すことができる。

θ を消去すると，$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=1$　　よって，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$: **アステロイドの式**

$\boxed{\text{別解}}$　直線 $\dfrac{x}{\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=1$　$\cdots$　⑥ の包絡線を求めるために，

> **＜包絡線＞**とは，与えられたすべての曲線群に接するような曲線のこと。
> $\boxed{\text{例}}$: 直線群 $y=2tx-t^2$ の包絡線は，$t^2-2xt+y=0$ の両辺を t について微分すると，
> $2t-2x=0$　これより，$t=x$ をもとの式に代入して，$y=2tx-t^2=x^2$: これが包絡線！

⑥ の両辺を θ について微分すると，$\dfrac{x\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{y\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$　$\cdots$　⑦

⑦ より，$y=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}x$　⑥ に代入して，$x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$

以上から，θ を消去すると，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$