第10回　１年数学　土曜講座　No.１

2005. 11. 19　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1． 次のような △ABC において，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$b=3,\ c=3\sqrt{3},\ B=30^\circ$

解説

正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}\sin 30^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より，$0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

[1]　$C=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

三平方の定理により　$a=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

[2]　$C=120^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

$A=B$ より △ABC は二等辺三角形であるから　$a=3$

以上から　$a=6,\ A=90^\circ,\ C=60^\circ$　または　$a=3,\ A=30^\circ,\ C=120^\circ$

2． △ABC において，$B=45^\circ$，$a:b=1:2$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin A$ の値を求めよ。

(2)　$c=\sqrt{2}$ であるとき，a を求めよ。

解説

(1)　$a:b=1:2$ より，$b=2a$ であるから

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　すなわち　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2a}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin A=\dfrac{a}{2a}\times\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2)　余弦定理により　$(2a)^2=a^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$

$4a^2=a^2+2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

整理して　$3a^2+2a-2=0$

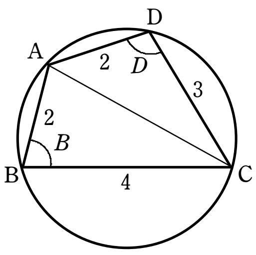
これを解くと　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

3． 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝2，BC＝4，CD＝3，DA＝2 であるとする。次のものを求めよ。

(1)　対角線 AC の長さ　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

解説



(1)　△ABC に余弦定理を適用して

$AC^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos B$

$=20-16\cos B$　……①

また，四角形 ABCD は円に内接するから

$D+B=180^\circ$　よって　$D=180^\circ-B$

△ACD に余弦定理を適用して

$AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos(180^\circ-B)$

$=13+12\cos B$　……②

①，② より　$20-16\cos B=13+12\cos B$

整理して　$28\cos B=7$　ゆえに　$\cos B=\dfrac{1}{4}$

したがって　$AC^2=20-16\cos B=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$

AC＞0 であるから　AC＝4

(2)　$\sin B>0$ であるから　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

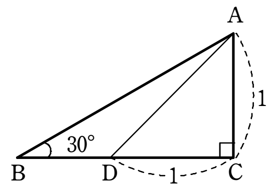
$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot4\sin B+\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin(180^\circ-B)$

$=4\sin B+3\sin B=7\sin B=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

4． $\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$ の値を求めたい。右の図において，次の問いに答えよ。

(1)　△ABD の 3 辺の長さを求めよ。

(2)　$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。



解説

(1)　AD＝$\sqrt{2}$，AB＝2　BC＝$\sqrt{3}$ より　BD＝$\sqrt{3}-1$

(2)　$\angle DAB=\angle CAB-\angle CAD=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

△ABD に正弦定理を用いて　$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

よって　$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

△ABD に余弦定理を用いて

$\cos 15^\circ=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-1)^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5． 3 辺の長さが 12，16，20 の直角三角形がある。この三角形に内接する円の半径を求めよ。

解説

この三角形の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\times12\times16=96$

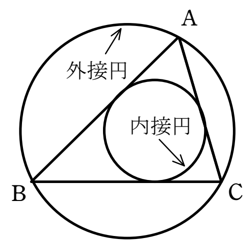
また，三角形に内接する円の半径を r とすると

$S=\dfrac{1}{2}r(12+16+20)=24r$

よって，$24r=96$ から　$r=4$

6． 三角形のどの辺にも接する円を，その三角形の内接円という。△ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$Rr=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$



解説

△ABC の面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$　……①

また，内接円の半径が r であるので　$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$　……②

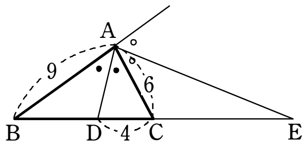
①，② より　$\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

整理すると　$Rr=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$

第10回　1年数学　土曜講座　No.2

2005.11.19　　（　）組（　）番　名前（　　　）

7. AB＝9，AC＝6 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線と，辺 BC またはその延長との交点をそれぞれ D，E とするとき，次のものを求めよ。



(1) 線分 BD の長さ
(2) 線分 EC の長さ

解説

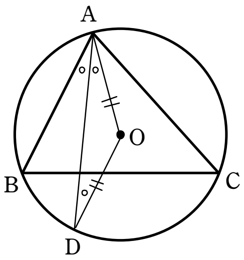
(1) 線分 AD は ∠A の二等分線であるから　BD : DC＝AB : AC
BD＝x とすると　x : 4＝9 : 6
よって　6×x＝4×9
これを解いて　x＝6

(2) 線分 AE は ∠A の外角の二等分線であるから　BE : EC＝AB : AC
EC＝x とすると，BE＝10＋x であるから
(10＋x) : x＝9 : 6
よって　6×(10＋x)＝9×x
これを解いて　x＝20

8. △ABC の外心を O とし，O は辺 AB 上にないとする。∠BAO の二等分線が外接円と再び交わる点を D とするとき，AB∥OD であることを証明せよ。

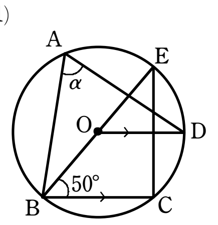
解説

OA＝OD から，△OAD は二等辺三角形である。
よって　∠ODA＝∠OAD　……①
線分 AD は ∠BAO の二等分線であるから
∠OAD＝∠BAD　……②
①，② より　∠ODA＝∠BAD
したがって，錯角が等しいから　AB∥OD



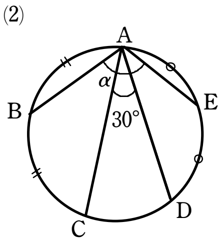
9. 下の図において，α を求めよ。ただし，O は円の中心とする。

(1)

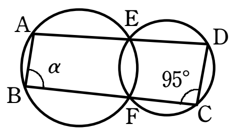


OD∥BC

(2)



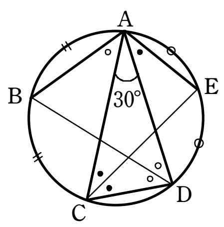
(3)



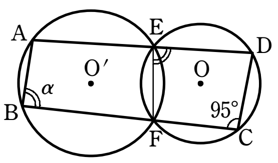
解説

(1) OD∥BC より，∠EOD＝∠OBC＝50° であるから
∠BOD＝180°－∠EOD＝180°－50°＝130°
よって　α＝∠BAD＝$\frac{1}{2}$∠BOD＝$\frac{1}{2}$×130°＝65°

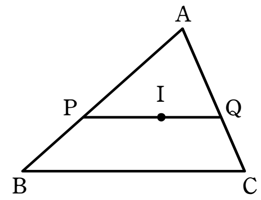
(2) ∠ADB＝∠BDC＝∠BAC
∠ACE＝∠ECD＝∠EAD
よって
α＝30°＋(∠BAC＋∠EAD)
＝30°＋$\frac{1}{2}$(∠ADC＋∠ACD)
＝30°＋$\frac{1}{2}$(180°－∠CAD)
＝30°＋$\frac{1}{2}$(180°－30°)＝105°



(3) 右の図において，四角形 EFCD は円 O に内接するから
∠DEF＋∠DCF＝180°
よって　∠DEF＝180°－95°＝85°
四角形 ABFE は円 O′ に内接するから
α＝∠ABF＝∠DEF＝85°

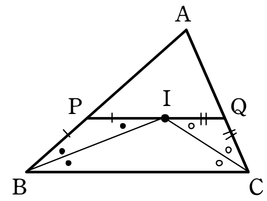


10. △ABC の内心 I を通り，辺 BC に平行な直線と辺 AB，AC の交点を，それぞれ P，Q とするとき，PQ＝PB＋QC であることを証明せよ。



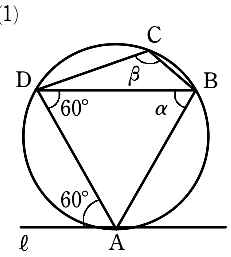
解説

I は内心であるから　∠PBI＝∠CBI
また，PQ∥BC から　∠PIB＝∠CBI
よって　∠PBI＝∠PIB
△PBI は二等辺三角形であるから
PB＝PI
同様にして，△QCI において　QC＝QI
したがって　PB＋QC＝PI＋QI＝PQ



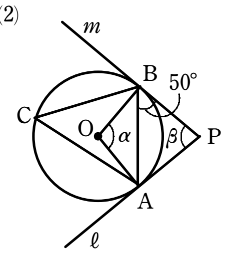
11. 下の図において，α，β を求めよ。ただし，直線 ℓ，m は円の接線とする。

(1)



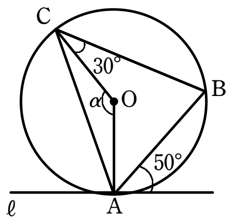
A は円の接点

(2)



A，B は円の接点

(3)

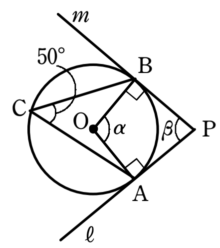


A は円の接点

解説

(1) 円の接線と弦の作る角により　α＝60°
△ABD において，内角の和は 180° であるから
∠DAB＝180°－(α＋60°)＝180°－(60°＋60°)＝60°
円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから
β＝180°－∠DAB＝180°－60°＝120°

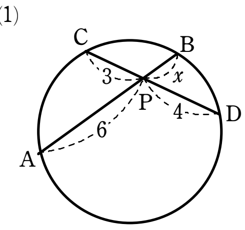
(2) 円の接線と弦の作る角により　∠ACB＝50°
よって　α＝2×50°＝100°
四角形 OAPB において，∠OBP＝∠OAP＝90° であるから
β＝360°－(α＋90°＋90°)
＝360°－(100°＋90°＋90°)＝80°



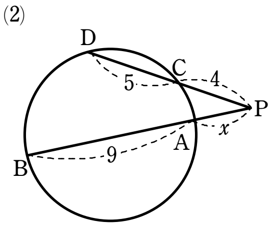
(3) 円の接線と弦の作る角により，∠ACB＝50° であるから　∠OCA＝50°－30°＝20°
△OAC において，内角の和は 180° であるから
α＝180°－2×20°＝140°

12. 下の図において，x を求めよ。ただし，直線 PT は円の接線で，T は接点である。

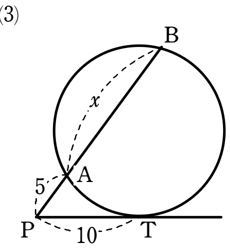
(1)



(2)



(3)



解説

(1) 方べきの定理により
6・x＝3・4　すなわち　6x＝12　これを解いて　x＝2

(2) 方べきの定理により　x・(x＋9)＝4・(4＋5)
式を整理して　$x^2+9x-36=0$　$(x+12)(x-3)=0$　$x>0$ より　$x=3$

(3) 方べきの定理により
5・(x＋5)＝10^2　すなわち　5x＝75　これを解いて　x＝15