第11回　1年数学　土曜講座

2005.12.10(土)

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

1 xについての2次方程式$3x^2+6x-a=0$ …①と，1次不等式 $\dfrac{a-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$ …②がある。

ただし，aは実数の定数である。

(1)　方程式①が異なる2つの実数の解をもつようなaの値の範囲を求めよ。

(2)(ⅰ)　$x=-1$が不等式②を満たすようなaの値の範囲を求めよ。

(ⅱ)　$x=-2$が不等式②を満たさないようなaの値の範囲を求めよ。

(3)　(1)，(2)(ⅰ)をともに満たす整数aに対して，方程式①の解のうち，不等式②を満たすものを求めよ。

解説

(1)　方程式①が異なる2つの実数解をもつことから，判別式をDとおくと，

$D>0$であればよい。$D/4=3^2-3(-a)=9+3a$　$D>0$より，$a>-3$　答

(2)(ⅰ)　$x=-1$が不等式②の解であるから，これを代入すると，

$\dfrac{a-(-1)}{2}<2\cdot(-1)+\dfrac{5}{2}$　これを解いて，$a<0$　答

(ⅱ)　$x=-2$が不等式②の解でないから，これを代入すると，

$\dfrac{a-(-2)}{2}\geqq 2\cdot(-2)+\dfrac{5}{2}$　これを解いて，$a\geqq -5$　答

(3)　(1)，(2)(ⅰ)をともに満たすaの値の範囲は，$-3<a<0$

これを満たす整数は，$a=-2,\ -1$

ⅰ）$a=-2$のとき，方程式①は　$3x^2+6x+2=0$となり，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

不等式②は　$\dfrac{-2-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$となり，$x>-\dfrac{7}{5}$　ここで，

$\dfrac{3}{2}<\sqrt{3}<2$であるから，$-\dfrac{3}{2}<-3+\sqrt{3}<-1$より，$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{1}{3}$

$-5<-3-\sqrt{3}<-\dfrac{9}{2}$より，$-\dfrac{5}{3}<\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{3}{2}$

よって，$x>-\dfrac{7}{5}$であるものは，$x=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$

ⅱ）$a=1$のとき，方程式①は　$3x^2+6x+1=0$となり，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$

不等式②は　$\dfrac{-1-x}{2}<2x+\dfrac{5}{2}$となり，$x>-\dfrac{6}{5}$　ここで，

$2<\sqrt{6}<3$であるから，$-1<-3+\sqrt{6}<0$より，$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}<0$

$-6<-3-\sqrt{6}<-5$より，$-2<\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}<-\dfrac{5}{3}$

よって，$x>-\dfrac{6}{5}$であるものは，$x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

したがって，ⅰ)，ⅱ)より，$x=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}$，$x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$　答

2 AB=2，BC=$\sqrt{7}$，CA=3の△ABCがある。

(1)　∠BACの大きさを求めよ。

(2)　△ABCの面積を求めよ。また，辺AC上に点Dをとる。△BCDの面積が$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるとき，CDの長さを求めよ。

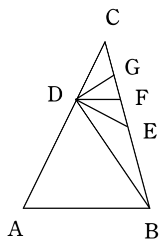
(3)　(2)のとき，∠BDCを4等分する3本の直線と辺BCとの交点を点Bに近い方から順にE，F，Gとする。このとき，DGの長さを求め，△DGFの面積を求めよ。

解説

(1)　△ABCにおいて，余弦定理より，

$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA}=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\angle BAC<180^\circ$より，$\angle BAC=60^\circ$　答



(2)　△ABCの面積をSとすると，

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　答

△BCDの面積をS_1とおくと，$S:S_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3:1$

△ABCと△BCDはAC，DCをそれぞれ底辺としたときに

高さは共通だから，AC：DC=3：1　よって，$DC=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$　答

(3)　(2)のとき，AD=2，AB=2，∠BAD=60°であるから，△ABDは正三角形である。

よって，BD=2，∠ADB=60°　これより，∠BDC=120°

ゆえに，∠BDE=∠EDF=∠FDG=∠GDC=30°

また，△BDGと△GDCの面積の和が，△BCDの面積に一致し，∠BDG=90°だから，

$\dfrac{1}{2}BD\cdot DG+\dfrac{1}{2}CD\cdot DG\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

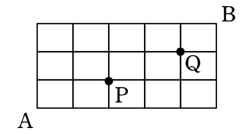
DG=xとおくと，$2x+\dfrac{1}{2}x=\sqrt{3}$　$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$　よって，$DG=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$　答

また，∠BDF=60°であるから，∠BDF=∠DBA　これより，DF∥AB

DF：AB=CD：CA=1：3であるから，$DF=\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{2}{3}$

したがって，$\triangle DGF=\dfrac{1}{2}DF\cdot DG\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$　答

3 右図のような街路と，4地点A，B，P，Qがある。



(1)　AからBまでの最短の道順は全部で何通りあるか。

(2)　AからPを通ってBに行き，さらにBからQを通ってAに戻る最短の道順は全部で何通りあるか。

(3)　AからP，Qのどちらか一方のみを通ってBに行き，さらにBからQもPも通らないでAに戻る最短の道順は全部で何通りあるか。

解説

(1)　右へ1区画進むことを→，上へ1区画進むことを↑で表すと，一つの最短の道順には5個の→，3個の↑，合計8個を一列に並べる順列が対応する。

よって，求める最短の道順は，$\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$(通り)　答

(2)　一般に，AからBへ行く最短の道順の個数をn(A→B)と書くことにすると，

ⅰ）行きの道順は，$n(A\to P\to B)=n(A\to P)\times n(P\to B)=\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\times\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=30$(通り)

ⅱ）帰りの道順は，$n(B\to Q\to A)=n(B\to Q)\times n(Q\to A)=\dfrac{2!}{1!\cdot 1!}\times\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=30$(通り)

ⅰ)，ⅱ)より，求める道順は全部で，30×30=900(通り)　答

(3)　ⅰ）行きの道順を考えると，$n(A\to P\to B)=30$(通り)　：　(2)より

$n(A\to Q\to B)=n(A\to Q)\times n(Q\to B)=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\times\dfrac{2!}{1!\cdot 1!}=15\times 2=30$(通り)

$n(A\to P\to Q\to B)=n(A\to P)\times n(P\to Q)\times n(Q\to B)=\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\times\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\times\dfrac{2!}{1!\cdot 1!}$

$=3\times 3\times 2=18$(通り)　よって，AからP，Qのどちらか一方のみを通ってBに行く

道順の個数は，$n(A\to P\to B)+n(A\to Q\to B)-n(A\to P\to Q\to B)-n(A\to P\to Q\to B)$

$=30+30-18-18=24$(通り)

ⅱ）帰りの道順は，全体の道順から，PまたはQを通る道順をひけばよいので，

$n(B\to A)=56$(通り)　：　(1)より　$n(B\to Q\to A)=30$(通り)　：　(2)より

$n(B\to P\to A)=n(B\to P)\times n(P\to A)=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\times\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}=10\times 3=30$(通り)

$n(B\to Q\to P\to A)=n(B\to Q)\times n(Q\to P)\times n(P\to A)=\dfrac{2!}{1!\cdot 1!}\times\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\times\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}$

$=2\times 3\times 3=18$(通り)　よって，BからQもP通らないでAに戻る道順の個数は，

$n(B\to A)-\{n(B\to Q\to A)+n(B\to P\to A)-n(B\to Q\to P\to A)\}=56-(30+30-18)$

$=14$(通り)　ⅰ)，ⅱ)より，求める道順は全部で，24×14=336(通り)　答