第12回　１年数学　土曜講座

2005. 12. 17（土）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　）

1 2次関数 $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5$ がある。ただし，a，b は定数で $a\neq 0$ とする。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 2)$ を通るとき，$0\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての x に対し，$f(x)\geqq 0$ であるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $a=\dfrac{1}{2}$，$b>2$ とする。点O $(0,\ 0)$，A $(2b,\ 0)$，B $(0,\ 21)$，O $(b,\ 21)$ に対し，$y=f(x)$ のグラフが平行な2本の線分OA，BC（ただし，両端の点を含む）のいずれとも共有点をもたないとき，b のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

(1) $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5=a(x-2)^2+b-5$

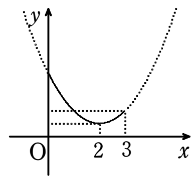
よって，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(2,\ b-5)$ 答

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 2)$ を通るから，$f(1)=2$

よって，$a-4a+4a+b-5=2$　$b=7-a$

このとき，$f(x)=a(x-2)^2-a+2$

ｉ）$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では右図のようになる。

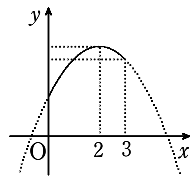


この範囲で，$f(x)$ は $x=2$ で最小値 $f(2)=-a+2$ をとる。

ゆえに，$-a+2\geqq 0$　$a\leqq 2$

$a>0$ より，$0<a\leqq 2$

ⅱ）$a<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では右図のようになる。



この範囲で，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=3a+2$ をとる。

ゆえに，$3a+2\geqq 0$　$a\geqq -\dfrac{2}{3}$

$a<0$ より，$-\dfrac{2}{3}\leqq a<0$

したがって，ｉ），ⅱ）より，$-\dfrac{2}{3}\leqq a<0$，$0<a\leqq 2$ 答

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ より，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+b-3=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+b-5$

$b>2$ であるから，$y=f(x)$ のグラフと2つの線分OA，BCの位置関係は，次の3つの場合が考えられる。

図１

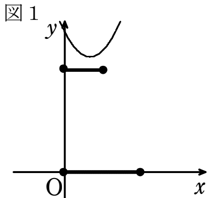


図２

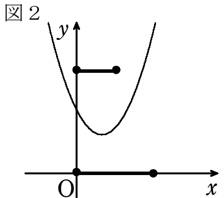
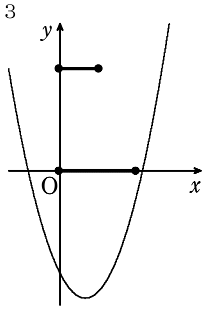


図３



ｉ）グラフが図１のようになるとき，

関数 $f(x)$ は $0\leqq x\leqq b$ の範囲で，$x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから，$b-5>21$　$b>26$

$b>2$ より，$b>26$

ⅱ）グラフが図２のようになるとき，

関数 $f(x)$ は $0\leqq x\leqq 2b$ の範囲で，$x=2$ のとき最小値 $b-5$ をとるから，

$f(0)=b-3<21$ …①，$f(2)=b-5>0$ …②，$f(b)=\dfrac{1}{2}b^2-b-3<21$ …③

①より，$b<24$　②より，$b>5$　③より，$b^2-2b-48<0$　$(b+6)(b-8)<0$

$-6<b<8$　$b>2$ であるから，これらをともに満たす b の値の範囲は，$5<b<8$

ⅲ）グラフが図３のようになるとき，

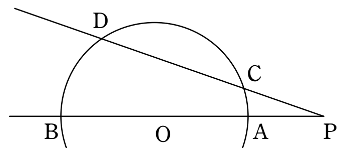
関数 $f(x)$ は $0\leqq x\leqq 2b$ の範囲で，$x=2b$ のとき最大値 $2b^2-3b-3$ をとるから，

$2b^2-3b-3<0$ より，$\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$

$b>2$ より，$2<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$

したがって，ｉ），ⅱ），ⅲ）より，$2<b<\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$，$5<b<8$，$26<b$ 答

2 円Oの外部に点Pがある。直線OPと円Oの交点を点Pに近い方からA，Bとする。
また，点Pを通るもう1本の直線と円Oの交点を点Pに近い方からC，Dとする。



(1) $\angle\mathrm{ABC}=15^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PC}=4$，$\mathrm{CD}=8$ のとき，円Oの半径を求めよ。

(3) (2)のとき，2点C，Dにおける円Oの2本の接線の交点をQとし，点QからOP直線に垂線を引き，OPとの交点をHとする。5点O，H，C，Q，Dが同一円周上にあることを示し，線分PHの長さを求めよ。

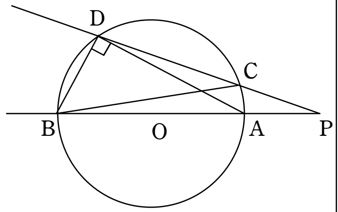
解説

(1) 円周角の性質より，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ABC}=15^\circ$

ABは円Oの直径であるから，

$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$　よって，

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BDA}+\angle\mathrm{ADC}=90^\circ+15^\circ=105^\circ$ 答



(2) 円Oの半径を r とおくと，方べきの定理より，

$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=3+2r$，$\mathrm{PC}=4$，

$\mathrm{PD}=4+8=12$ をそれぞれ代入して，$3(3+2r)=4\cdot 12$

これを解くと，$r=\dfrac{13}{2}$ 答

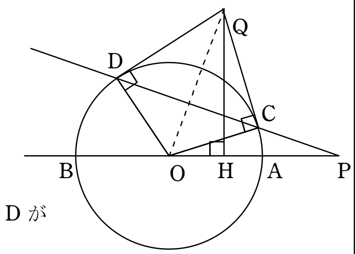
(3) DQ，CQは円Oの接線であるから，

$\angle\mathrm{ODQ}=\angle\mathrm{OCQ}=90^\circ$　よって，

2点C，Dは線分OQを直径とする円周上にある。

　さらに，$\mathrm{QH}\perp\mathrm{OP}$ より，$\angle\mathrm{OHQ}=90^\circ$

ゆえに，点Hもまた，線分OQを直径とする円周上にある。したがって，5点O，H，C，Q，Dが同一円周上にあることが示せた。



この，5点を通る円について，方べきの定理より，$\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PO}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}+r=3+\dfrac{13}{2}=\dfrac{19}{2}$

よって，$\dfrac{19}{2}\mathrm{PH}=4\cdot 12$　$\mathrm{PH}=\dfrac{96}{19}$ 答

3 袋の中に白球1個と赤球2個が入っている。この袋から球を1個取り出し，色を確認してもとに戻す。この試行を赤球が連続して2回出るまで行う。ただし，この試行を5回行っても赤球が連続して出ないときは，そこで試行をやめる。このとき，試行をやめるまでに出る白球の個数を考える。

(1) 白球が5個である確率を求めよ。

(2) 白球が0個である確率を求めよ。また，白球が1個である確率を求めよ。

(3) 白球の個数の期待値を求めよ。

解説

(1) 袋から球を1個取り出したとき，白球である確率は $\dfrac{1}{3}$，赤球である確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

白球が5個であるのは，5回続けて白球が出るときであるから，

その確率は，${}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{1}{243}$ 答

(2) 白球が0個であるのは，はじめの2回で赤球が2回続けて出るときであるから，

その確率は，${}_2\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$ 答

また，白球が1個であるのは，試行をやめるまでの球の出方が，

白赤赤，赤白赤赤のいずれかであるから，その確率は，

$\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{27}+\dfrac{8}{81}=\dfrac{20}{81}$ 答

(3) 白球の個数を X とおくと，X のとりうる値は，$X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である。

$X=0$ となる確率は(2)より $\dfrac{4}{9}$，$X=1$ となる確率は(2)より $\dfrac{20}{81}$

$X=2$ となるのは，白白赤赤，白赤白赤赤，赤白白赤赤，赤白赤白赤赤の順に出るときであるから，その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times 3=\dfrac{4}{27}$，

$X=3$ となるのは，白白白赤赤，白白赤白赤，白赤白白赤，白赤白赤白，赤白白白赤，赤白白赤白，赤白赤白白の順に出るときであるから，

その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times 7=\dfrac{28}{243}$

$X=4$ となるのは，いずれも球を5回出して，白球を4回，赤球を1回取り出すときであるから，その確率は ${}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{243}$，$X=5$ となる確率は，(1)より $\dfrac{1}{243}$

以上より，求める期待値は，

$0\times\dfrac{4}{9}+1\times\dfrac{20}{81}+2\times\dfrac{4}{27}+3\times\dfrac{28}{243}+4\times\dfrac{10}{243}+5\times\dfrac{1}{243}=\cdots=\dfrac{29}{27}$ 答