第13回　１年数学　土曜講座

2006.1.14(土)　※１，２，３必答，４，５，６，７から２題選択　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の$\boxed{}$を正しく埋めよ．

(1)　$(x^2+x+2)(x^2+x-3)$ を展開し整理すると$\boxed{(ア)}$となる。

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$ を計算すると$\boxed{(イ)}$となる。

(3)　2 次関数のグラフが 3 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通るとき，この 2 次関数は $y=\boxed{(ウ)}$である。

(4)　2 次関数 $y=x^2+kx+k+8$ のグラフが，x 軸と異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲は$\boxed{(エ)}$である。

解説

(1)　$(x^2+x+2)(x^2+x-3)=\{(x^2+x)+2\}\{(x^2+x)-3\}=(x^2+x)^2-(x^2+x)-6$

$=x^4+2x^3+x^2-x^2-x-6=x^4+2x^3-x-6$　答

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}-\dfrac{(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-2-\sqrt{6}-2}{6-4}=\dfrac{-4}{2}=-2$　答

(3)　条件より，グラフが x 軸と 2 点で交わり，その x 座標が-1，3 であるから，

求める 2 次関数は，$y=a(x+1)(x-3)$　$(a\neq 0)$　とおける。

このグラフが，点$(2,\ 6)$を通るから，$6=a(2+1)(2-3)$　これを解いて，$a=-2$

したがって，求める 2 次関数は，$y=-2(x+1)(x-3)$

すなわち，$y=-2x^2+4x+6$　答

別解　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと，

このグラフが 3 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通るから，

$\begin{cases}0=a-b+c\\0=9a+3b+c\\6=4a+2b+c\end{cases}$　これを解くと，$a=-2$，$b=4$，$c=6$

したがって，求める 2 次関数は，$y=-2x^2+4x+6$　答

(4)　2 次関数 $y=x^2+kx+k+8$ のグラフが，x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は，

2 次方程式 $x^2+kx+k+8=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

判別式をD とおくと，$D>0$ であればよい。

$D=k^2-4\cdot 1(k+8)=k^2-4k-32=(k+4)(k-8)$　$D>0$ より，$(k+4)(k-8)>0$

よって，$k<-4$，$8<k$　答

別解　$y=x^2+kx+k+8=\left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}+k+8$

よって，グラフは下に凸の放物線だから，題意を満たすための条件は

$-\dfrac{k^2}{4}+k+8<0$　$k^2-4k-32>0$　$(k+4)(k-8)>0$　よって，$k<-4$，$8<k$　答

2 不等式 $x-5\geqq\dfrac{x-13}{3}$ …①，$2a-4\leqq 2x\leqq 5a+2$ …②がある。ただし，a は正の定数である。

(1)　不等式①を解け。

(2)　$x=2$ が不等式②を満たすとき，a の値の範囲を求めよ。

(3)　x の 2 次方程式 $x^2-(3a+1)x+6a-2=0$ の解がすべて，不等式①と②の両方を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

(1)　①より，$3(x-5)\geqq x-13$　$2x\geqq 2$　よって，$x\geqq 1$　答

(2)　$x=2$ が不等式②を満たすから，$2a-4\leqq 2\cdot 2\leqq 5a+2$

$\begin{cases}2a-4\leqq 4\\4\leqq 5a+2\end{cases}$　これらを解くと，$\dfrac{2}{5}\leqq a\leqq 4$

これと a は正の定数であることより，$\dfrac{2}{5}\leqq a\leqq 4$　答

(3)　$x^2-(3a+1)x+2(3a-1)=0$　$(x-2)(x-3a+1)=0$

2 次方程式 の 2 つの解は，$x=2$，$3a-1$ である。

この 2 つがともに不等式①と②の両方を満たす。

ｉ）　不等式①の解は，(1)より，$x\geqq 1$ であるから，

$\begin{cases}2\geqq 1\\3a-1\geqq 1\end{cases}$　より，$\dfrac{2}{3}\leqq a$　…③

ⅱ）　$x=2$ が不等式②を満たすとき，(2)より，$\dfrac{2}{5}\leqq a\leqq 4$　…④

$x=3a-1$ が不等式②を満たすとき，$2a-4\leqq 2(3a-1)\leqq 5a+2$

$\begin{cases}2a-4\leqq 6a-2\\6a-2\leqq 5a+2\end{cases}$　より，$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqq a\\a\leqq 4\end{cases}$　よって，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 4$　…⑤

③，④，⑤と a は正の定数であることより，

これらを同時に満たす a の値の範囲は　$\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq 4$　答

3 関数 $f(x)=2x^2-ax+b$ (a，b は定数)がある。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点を求めよ。

(2)　$0<a<8$ とする。関数 $f(x)$ が，$0\leqq x\leqq 4$ において最大値 9 をとり，$0\leqq x\leqq 2$ において最大値 1 をとるとき，a，b の値を求めよ。

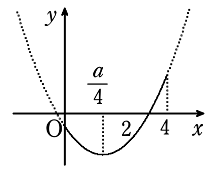
(3)　$a>0$ とする。関数 $f(x)$ が，$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{4}+1$ において最大値 9，最小値 1 をとるとき，a，b の値を求めよ。

解説

(1)　$f(x)=2x^2-ax+b=2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{8}+b$

よって，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は　$\left(\dfrac{a}{4},\ -\dfrac{a^2}{8}+b\right)$　答

(2)　$0<a<8$ より，$0<\dfrac{a}{4}<2$ であるから，



$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$のグラフは右図のようになる。

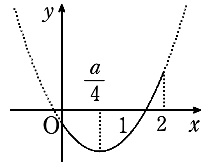
よって，$x=4$ のとき，最大値 $2\cdot 4^2-4a+b$

$=-4a+b+32$ をとるから，条件より，

$-4a+b+32=9$　…①

また，$0\leqq x\leqq 2$ において，最大値を考えると，

ｉ）　$0<\dfrac{a}{4}<1$ すなわち $0<a<4$ …②のとき，



$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2)$のグラフは右図のようになる。

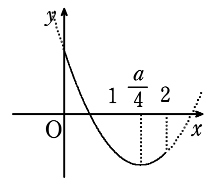
よって，$x=2$ のとき，最大値 $2\cdot 2^2-2a+b$

$=-2a+b+8$ をとる。よって，

$-2a+b+8=1$　…③　①，③より，$a=8$，$b=9$

であるが，これは，②を満たさないから適さない。

ⅱ）　$1\leqq\dfrac{a}{4}<2$ すなわち $4\leqq a<8$ …④のとき，



$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2)$のグラフは右図のようになる。

よって，$x=0$ のとき，最大値 b をとる。よって，

$b=1$　…③　①，③より，$a=6$，$b=1$

これは，④を満たすから適する。

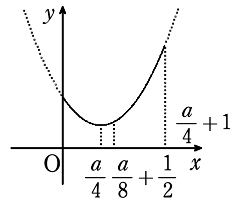
以上より，求める a，b の値は，$a=6$，$b=1$　答

(3)　$a>0$ より，$0<\dfrac{a}{4}<\dfrac{a}{4}+1$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸 $x=\dfrac{a}{4}$ は，

$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{4}+1$ の範囲にある。よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{4}$ で最小となる。最小値が 1 であるから，$-\dfrac{a^2}{8}+b=1$　すなわち　$b=\dfrac{a^2}{8}+1$　…⑥

このとき，$f(x)=2x^2-ax+\dfrac{a^2}{8}+1$　最大値については，場合を分ける。

ｉ）　$0<\dfrac{a}{4}<\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{2}$ すなわち $0<a<4$ のとき，



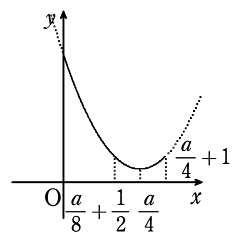
$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{4}+1$ の範囲では，$x=\dfrac{a}{4}+1$ で $f(x)$ は

最大となる。

$f\left(\dfrac{a}{4}+1\right)=2\left(\dfrac{a}{4}+1\right)^2-a\left(\dfrac{a}{4}+1\right)+\dfrac{a^2}{8}+1=\cdots=3$

となり，これは条件に反する。

ⅱ）　$\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{a}{4}$ すなわち $a\geqq 4$ のとき，



$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{4}+1$ の範囲では，$x=0$ で $f(x)$ は

最大となる。題意より，

$f(0)=b=9$　よって，⑥より，$a^2=64$

$a>0$ より，$a=8$　これは，$a\geqq 4$ を満たす。

以上より，$a=8$，$b=9$　答

第13回　1年数学　土曜講座　2006. 1. 14(土)　※1，2，3必答，4，5，6，7から2題選択　(　)組(　)番　名前(　)

4 AB=13，AC=15 で∠Bが鋭角の△ABCがあり，外接円の半径は $\frac{65}{8}$ である。

(1) $\sin B$ の値を求めよ。

(2) $\cos B$ の値を求めよ。また，辺BCの長さを求めよ。

(3) 直線ACに関して，点Bと反対側に点Dを，DA=DC，∠ADC+∠ABC=180° となるようにとる。線分DCの長さとそのときの四角形ABCDの面積を求めよ。

解説

(1) 正弦定理より，$\frac{15}{\sin B}=2\times\frac{65}{8}$

よって，$\sin B=15\div\frac{65}{4}=15\times\frac{4}{65}=\frac{12}{13}$ 答

(2) ∠Bが鋭角であるから，$\cos B>0$

よって，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$ 答

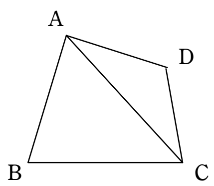
余弦定理より，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$

BC=x とすると，$15^2=13^2+x^2-2\cdot13\cdot x\cdot\frac{5}{13}$

これより，$x^2-10x-56=0$　$(x+4)(x-14)=0$

$x>0$ より，$x=14$　すなわち，BC=14 答

(3) △ACDにおいて，余弦定理より



$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos D$

∠ADC+∠ABC=180° より，

$\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B=-\frac{5}{13}$

ここで，DA=DC=y とすると，

$15^2=y^2+y^2-2y\cdot y\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$　$15^2=2y^2+\frac{10}{13}y^2$　$\frac{36}{13}y^2=15^2$　$y^2=\frac{15^2\times13}{36}$

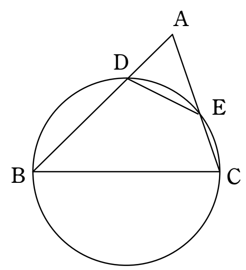
$y>0$ であるから，$y=\frac{15\sqrt{13}}{6}=\frac{5\sqrt{13}}{2}$　すなわち，DC=$\frac{5\sqrt{13}}{2}$ 答

また，四角形ABCDの面積は，△ABCの面積と△ACDの面積の和であるから，

$\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B+\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin D$　$\sin D=\sin(180°-B)=\sin B$

$=\frac{1}{2}\cdot13\cdot14\cdot\frac{12}{13}+\frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{13}}{2}\right)^2\frac{12}{13}=84+\frac{1}{2}\cdot\frac{25\cdot13}{4}\cdot\frac{12}{13}=84+\frac{75}{2}=\frac{243}{2}$ 答

5 ∠A=60°，BC=2 の鋭角三角形ABCがあり，辺BCを直径とする円と辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとする。



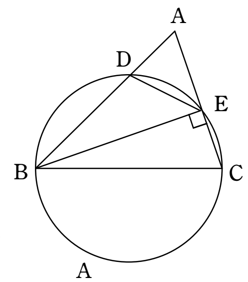
(1) ∠AEBの大きさを求めよ。また，AE : ABを求めよ。

(2) △AED∽△ABCであることを示し，線分DEの長さを求めよ。

(3) 直線BCが直線DEと点Fで交わり，Eが線分DFの中点となるとき，線分CFの長さ，および $\frac{CE}{BD}$ の値を求めよ。

解説

(1) BCは直径であるから，∠BEC=90°,



よって，∠AEB=90° 答

また，∠BAE=60°であるから，

AE : AB=1 : 2 答

(2) △AEDと△ABCにおいて，

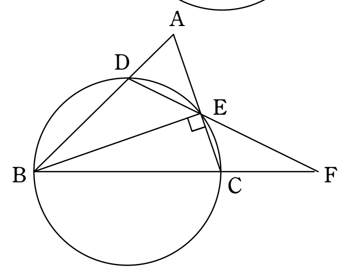
∠EAD=∠BAC(共通)，円に内接する四角形の1つの内角はその対角の外角に等しいから，∠AED=∠ABC

よって，2組の角がそれぞれ等しいから，△AED∽△ABC

したがって，$\frac{DE}{CB}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$

BC=2であるから，DE=1 答

(3) 方べきの定理より，FC·FB=FE·FD



FE=1，FD=2，BC=2であるから，

FC=x とおくと，$x(x+2)=1\cdot2$

$x^2+2x-2=0$　$x>0$ より，$x=-1+\sqrt{3}$

すなわち，CF=$\sqrt{3}-1$ 答

また，△FBDと△FECにおいて，∠BFD=∠EFC，∠DBF=∠CEF

よって，△FBD∽△FEC　したがって，$\frac{CE}{DB}=\frac{FC}{FD}$

ここで，FC=$\sqrt{3}-1$，FD=2であるから，$\frac{CE}{BD}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 答

6 A，A，B，B，C，Dの6個の文字を横一列に並べる。

(1) 並べ方は全部で何通りあるか。

(2) CとDが隣り合う並べ方は全部で何通りあるか。

(3) CがBと隣り合わない並べ方は全部で何通りあるか。

解説

(1) 6文字のうち，AとBはそれぞれ2文字ずつあるから，

横一列に並べる場合の数は，$\frac{6!}{2!2!1!1!}=180$(通り) 答

(2) C，Dの2文字をまとめて1つのものと見なしたとき，

これと残り4文字をあわせて，5個のものを並べる順列の総数は，$\frac{5!}{2!2!1!}=30$(通り)

その順列のそれぞれに対して，C，Dの並べ方は2通りあるから，

30×2=60(通り) 答

(3) C以外の5文字を並べて，Bと隣りあわないように，

文字の間および両端にCを並べる。

i) Bが隣り合うとき

2文字のBをまとめて1つのものと見なして，C以外の3文字と合わせて，

4個のものを並べる順列の総数は，$\frac{4!}{2!1!1!}=12$(通り)

そのそれぞれに対して，文字の間および両端の6個のうち，Bと隣り合わない場所は，3個である。よって，CがBと隣り合わない順列の数は，12×3=36(通り)

ii) Bが隣り合わないとき

C以外の5文字のすべての順列の数は，$\frac{5!}{2!2!1!}=30$(通り)

このうち，Bが隣り合うものはi)より，12通り。よって，Bが隣り合わない並べ方は，31−12=18(通り)

そのそれぞれに対して，文字の間および両端の6個のうち，Bと隣り合わない場所は，2個である。よって，CがBと隣り合わない順列の数は，18×2=36(通り)

i)とii)は同時に起こることはないから，CがBと隣り合わない

6文字の並べ方は36+36=72(通り) 答

7 1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれたカードが，それぞれ2枚ずつ計10枚ある。これらをよくかき混ぜて，同時に3枚のカードを取り出す。

(1) 取り出したカードに書かれた数字が1，3，5である確率を求めよ。

(2) 取り出したカードに書かれた数字が1，1，2のように，2枚が同じである確率を求めよ。

(3) 取り出したカードに書かれた数字の和が10である確率を求めよ。

解説

(1) 10枚のカードから3枚を取り出すとき，取り出し方は全部で ${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$(通り)あり，これらはすべて同様に確からしい。このうち，取り出したカードに書かれた数字が1，3，5となる取り出し方は，それぞれの数字について2通りあるから，

求める確率は，$\frac{2\times2\times2}{120}=\frac{1}{15}$ 答

(2) 同じ数字になる2枚のカードの数字は，1，2，3，4，5のいずれかで5通りある。そのそれぞれについて，同じ数字の2枚の取り出し方が ${}_2C_2=1$(通り)ある。さらに，そのそれぞれについて，残り1枚はその数字以外の8枚中のどれでもよいから，8通りある。したがって，取り出した3枚中2枚が同じ数字となる確率は，

$\frac{5\times1\times8}{120}=\frac{1}{3}$ 答

(3) 和が10となる3つの数字の組合せは，

{1，4，5}，{2，3，5}，{2，4，4}，{3，3，4} の4つの場合がある。

i) {1，4，5} のとき，

3つの数字がすべて異なるから，確率は(1)と同じく $\frac{1}{15}$

ii) {2，3，5} のとき，確率はi)と同じく $\frac{1}{15}$

iii) {2，4，4} のとき，

2のカードの取り出し方が ${}_2C_1=2$(通り)，4のカードの取り出し方が ${}_2C_2=1$(通り)。

よって，確率は，$\frac{2\times1}{120}=\frac{1}{60}$

iv) {3，3，4} のとき，確率はiii)と同じく $\frac{1}{60}$

i)〜iv)の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ 答