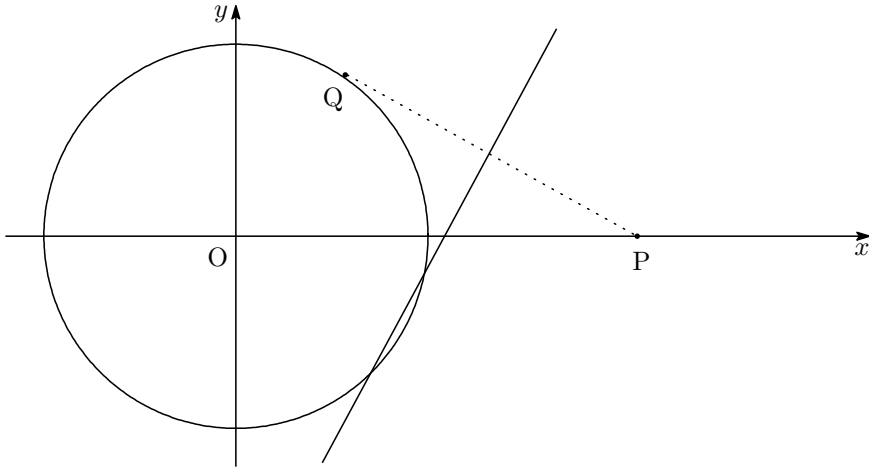


<包絡線>とは、与えられたすべての曲線群に接するような曲線のこと。

- 1 図のように、定点  $P(p, 0)$ 、円上を動く動点  $Q(\cos \theta, \sin \theta)$  を結ぶ線分  $PQ$  の垂直二等分線の包絡線 (通過領域の境界線) を求める。



解説 線分  $PQ$  の垂直二等分線は、 $y - \frac{\sin \theta}{2} = \frac{p - \cos \theta}{\sin \theta} \left( x - \frac{p + \cos \theta}{2} \right)$

$$\text{分母を払って整理すると、} 2 \sin \theta \cdot y - 2(p - \cos \theta)x + p^2 - 1 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

$$\text{この両辺を、} \theta \text{ について微分すると、} 2y \cos \theta + 2x(-\sin \theta) = 0$$

$$\text{よって、} y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{これを①に代入して、} 2 \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 2(p - \cos \theta)x + p^2 - 1 = 0$$

$$\text{これを解くと、} x = \frac{(1 - p^2) \cos \theta}{2(1 - p \cos \theta)} \quad \cdots \text{③}$$

$$\text{②に代入して、} y = \frac{(1 - p^2) \sin \theta}{2(1 - p \cos \theta)} \quad \cdots \text{④}$$

$$\text{③から、} \cos \theta = \frac{2x}{1 - p^2 + 2px} \quad \cdots \text{⑤}$$

$$\text{④から、} \sin \theta = \frac{2y}{1 - p^2 + 2px} \quad \cdots \text{⑥}$$

$$\text{⑤、⑥より、} \theta \text{ を消去すると、} \left( \frac{2x}{1 - p^2 + 2px} \right)^2 + \left( \frac{2y}{1 - p^2 + 2px} \right)^2 = 1$$

$$\text{これを整理すると、} 4(p^2 - 1) \left( x - \frac{p}{2} \right)^2 - 4y^2 = p^2 - 1$$

$$\text{よって、} \frac{\left( x - \frac{p}{2} \right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}(p^2 - 1)} = 1 \quad \text{ゆえに、この式は、}$$

$|p| > 1$  のとき、**双曲線**を表し、 $|p| < 1$  のとき、**楕円**を表す。 $p = 0$  のときは円。

例 :  $p = 2$  のとき、 $\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$ ,  $p = \frac{1}{2}$  のとき、 $\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{16}} = 1$