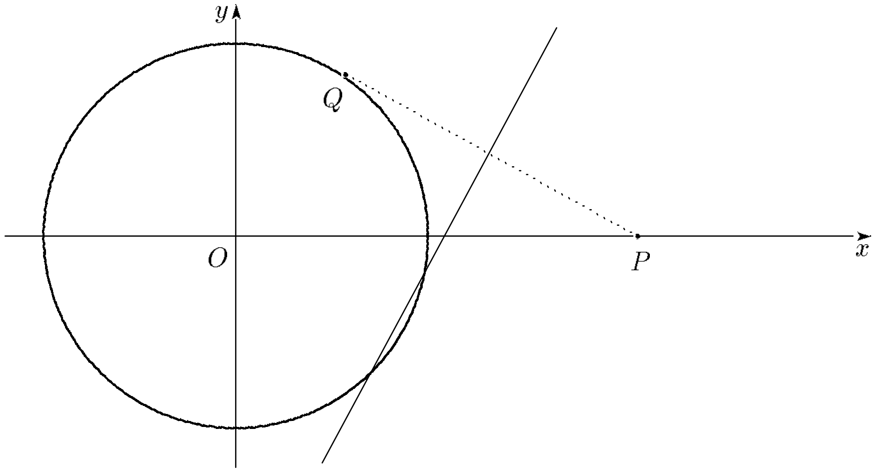
＜包絡線＞ (envelope) とは，与えられたすべての曲線群に接するような曲線のこと。

1 図のように，定点 $P(p,\ 0)$，円上を動く動点 $Q(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を結ぶ線分 PQ の垂直二等分線の包絡線 (通過領域の境界線) を求める。



解説　線分 PQ の垂直二等分線は，$y-\dfrac{\sin\theta}{2}=\dfrac{p-\cos\theta}{\sin\theta}\left(x-\dfrac{p+\cos\theta}{2}\right)$

分母を払って整理すると，$2\sin\theta\cdot y-2(p-\cos\theta)x+p^2-1=0$　…①

この両辺を，θ について微分すると，$2y\cos\theta+2x(-\sin\theta)=0$

よって，$y=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,x$　…②

これを①に代入して，$2\sin\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-2(p-\cos\theta)x+p^2-1=0$

これを解くと，$x=\dfrac{(1-p^2)\cos\theta}{2(1-p\cos\theta)}$　…③

②に代入して，$y=\dfrac{(1-p^2)\sin\theta}{2(1-p\cos\theta)}$　…④

③から，$\cos\theta=\dfrac{2x}{1-p^2+2px}$　…⑤

④から，$\sin\theta=\dfrac{2y}{1-p^2+2px}$　…⑥

⑤，⑥より，θ を消去すると，$\left(\dfrac{2x}{1-p^2+2px}\right)^2+\left(\dfrac{2y}{1-p^2+2px}\right)^2=1$

これを整理すると，$4(p^2-1)\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2-4y^2=p^2-1$

よって，$\dfrac{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{4}(p^2-1)}=1$　ゆえに，この式は,

$|p|>1$ のとき，**双曲線**を表し，$|p|<1$ のとき，**楕円**を表す。$p=0$ のときは円。

例 : $p=2$ のとき，$\dfrac{(x-1)^2}{\dfrac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{3}{4}}=1$，$p=\frac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{3}{16}}=1$