相加平均と相乗平均

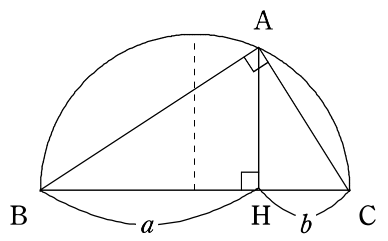
$\boxed{1}$ $a>0$, $b>0$のとき，次の不等式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}} \qquad \text{(相加平均)} \geqq \text{(相乗平均)}$$

証明 左辺－右辺$=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$

等号成立は，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$　つまり，$a=b$ のとき。

＜図形的意味＞



右図のような半円において，

$\triangle ABH \backsim \triangle CAH$（∵ 2 角が等しい）

対応する辺の比は等しいから，

$AH : CH = BH : AH$

よって，$AH^2 = BH \cdot CH$

ゆえに，$AH = \sqrt{ab}$

一方，この円の半径(図の点線)は $\dfrac{a+b}{2}$ だから，

半径$\geqq$AH が成り立つことは図より明らか。

ゆえに，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。<u>ただし，$a>0$，$b>0$</u>

また，半径＝AH になるのは，$a=b$ のときであることも図からわかる。

参考 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$: **調和平均**$=\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$　← 興味のある人は証明にChallenge !

$\boxed{2}$ $a>0$, $b>0$のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2$$

解答 $a>0$, $b>0$だから，正の数 $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{a}{b}$ に相加平均$\geqq$相乗平均の関係を用いると，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} \qquad \text{ゆえに} \quad \frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2$$