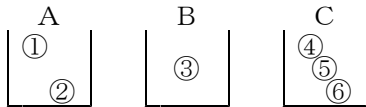


<組分け・分配問題>

※ 6個の球を3個の箱に分ける方法について、以下の方法は何通りあるか。
ただし、空箱があってもよいものとする。

- I) 球も箱も区別するとき
- II) 球は区別するが、箱は区別しないとき
- III) 球は区別せず、箱を区別するとき
- IV) 球も箱も区別しないとき

I) 6個の球も区別(①②③④⑤⑥と番号を付ける)し、3つの箱も区別(A B C)するとき



① ② ③ ④ ⑤ ⑥

A A B C C C と考えると、

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

∴ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ 通り = $3^6 = \underline{729}$ 通り

これは、A, B, Cの3個から重複を許して6個とる**重複順列**の1つとみることができる。

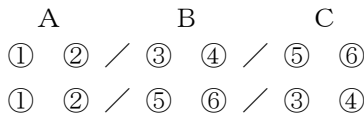
II) 6個の球は区別(①②③④⑤⑥と番号を付ける)するが、箱は区別しないとき

その前に、個数が指定されている次の場合(I)では個数指定なし)を考えると、

1) 2個ずつ3つの箱A, B, Cに分ける方法は?

${}^6C_2 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^2C_2 = 90$ 通り

2) 2個ずつ3つの組(箱は区別しない)に分ける方法は?



} 1)では別として数えるが、2)では区別がつかない。

∴ $90 \div 3! = 15$ 通り

では、この問題を考えてみると、

1) 空箱が2つできるとき、

箱は区別しないので、(0, 0, 6)個に分けるしかない。よって、1 通り

2) 空箱が1つできるとき、

箱は区別しないので、(0, y, z)個、 $y + z = 6 (y \leq z)$ となるように分ければよい。

2つの箱に入れる入れ方は、箱を区別すると $2^6 - 2$ (片方に入ってしまう場合を引く)

箱の区別をはずすと $(2^6 - 2) \div 2 = 31$ 通り

3) 空箱ができないとき、

箱は区別しないので、(x, y, z)個、 $x + y + z = 6 (x \leq y \leq z)$ となるように分けられ
ばよい。その組は (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)のいずれか。球は区別するので、

(1, 1, 4) → $\frac{{}^6C_1 \cdot {}^5C_1}{2!} = 15$

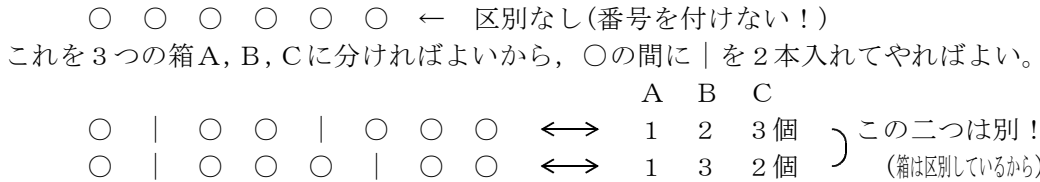
(1, 2, 3) → ${}^6C_1 \cdot {}^5C_2 = 60$

(2, 2, 2) → 2)より、15 通り

} ∴ $15 + 60 + 15 = 90$ 通り

よって、求める答えは $1 + 31 + 90 = \underline{122}$ 通り。

III) 6個の球は全く同じで区別がつかないが、箱を区別するとき



結局、求める場合の数は、○6個、|2個の合計8個を一列に並べる数と等しいから、8箇所のうちどの2箇所にも|を入れるかを決めればよい。その方法は、

$${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ 通り}$$

<別解①> A, B, Cの箱に入れる個数をそれぞれ x, y, z (個) とすると、
 $x + y + z = 6$, 空箱があってもよいので、 x, y, z は0以上の整数となる。これを満たす (x, y, z) の組をすべて求めればよい。

<別解②> 上の図を、 $x y y z z z$
 $x y y y z z z$ などと考えると、 x, y, z の異なる3種類から、重複を許して6個取る組合せ (**重複組合せ**) の数に等しい。

※ n 種類のものから重複を許して r 個取る組合せ。 \hookrightarrow ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ を使って、
 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2$ となる。

1 2 3 ... r 個
○ ○ ○ ... ○ を n 種類に分けるのだから、 $(n-1)$ 個の仕切りを入れればよい。 $r+n-1$ 個のうち○ r 個の場所を選べばよいから、 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ となる。

IV) 球も箱も区別しないとき

A, B, Cの箱に入れる個数をそれぞれ x, y, z (個) とすると、
 $x + y + z = 6$, 空箱があってもよいので、 x, y, z は0以上の整数となり、また、箱の区別もしないので、 $x \leq y \leq z$ ($x \geq y \geq z$ でもよいが) としてよい。
その組合せは、 $(x, y, z) = (0, 0, 6), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 3, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$ の 7通り

では、次の問題にすると I) ~ IV) の答えはそれぞれどうなるであろうか？
考えてみよう！！

【演習問題】 6個の球を3個の箱に分けるとき、以下の方法は何通りあるか。ただし、それぞれの箱には少なくとも1つは入れるものとする。

- I) 球も箱も区別するとき
- II) 球は区別するが、箱は区別しないとき
- III) 球は区別せず、箱を区別するとき
- IV) 球も箱も区別しないとき

<略解>

- I) $3^6 - \{{}_3C_2 \times (2^6 - 2) + 3\} = 540$ 通り
- II) 前ページII) 中の空箱がない場合だから、90通り (あるいはI)の答 $\div 3$!)
- III) 各箱に1個ずつ入れ、残りの3個を分ければよい。 x, y, z の3種類から3個を取り出す重複組合せは ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$ 通り
- IV) 上のIV) のうち、空箱がない組合せは、 $\{1, 1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}$ の 3通り