

補充プリント《三角関数の公式》

<基本3公式>

$$\textcircled{1} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\textcircled{2} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

①の両辺を $\cos^2 \theta$ で割って、②を用いると、

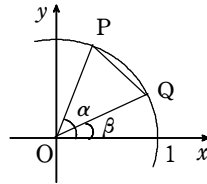
$$\textcircled{3} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



<加法定理>

半径1の単位円上の点P, Qの座標は、それぞれ
 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ とおけるから、
 $PQ^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$
 $= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \dots i)$

一方、 $\triangle OPQ$ に余弦定理を用いると、
 $PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(\alpha - \beta) \dots ii)$



$i) = ii)$ より、 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots iii)$ が成り立つ。

$iii)$ において、 $\beta \rightarrow -\beta$ で置き換えると、

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots iv)$ となる。

また、 $iii)$ において、 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha$ で置き換えると、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta$$

よって、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots v)$ となる。

また、 $v)$ において、 $\beta \rightarrow -\beta$ で置き換えると、

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots vi)$ となる。

ゆえに、
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots \textcircled{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots \textcircled{5}$$

$\tan(\alpha + \beta)$ の加法定理は②から、

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ より、分母分子を $\cos \alpha \cos \beta$ で割って、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \dots \textcircled{6}$$

<2倍角の公式>

④, ⑤, ⑥において、 $\beta = \alpha$ とおくと、それぞれ、

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \quad \text{よって、} \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \dots \textcircled{7}$$

また、
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

<半角の公式>

⑦(2倍角の余弦)より、 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\theta = \frac{\alpha}{2}$ を代入すると、

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{となる。}$$

また、
$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

<積→和, 和→積の変換公式>

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots \textcircled{4}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots \textcircled{4}' \quad \text{の2式を足し引きして、}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta$$

よって、
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

また、
$$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (\alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ とおく})$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

同様に、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots \textcircled{5}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots \textcircled{5}' \quad \text{の2式を足し引きして、}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin \alpha \sin \beta$$

よって、
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

また、
$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

<三角関数の合成>

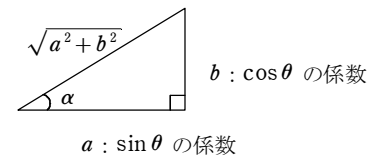
$\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \dots \textcircled{4}''$ より、

$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin \theta \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos \theta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ と変形して、

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし、 $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

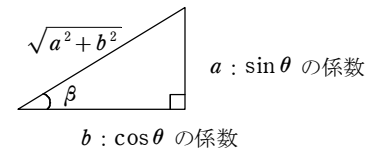
右図のような図を書けばよい。



例 $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2\sin(\theta + 30^\circ)$

$\cos(\theta - \beta) = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \dots \textcircled{5}''$ を用いて、

$\cos(\theta - \beta)$ に合成する公式を導いてみよう!



$$b \cos \theta + a \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta) \quad \text{※符号, 係数に注意のこと!}$$

例 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2\cos(\theta - 60^\circ)$

