

## <漸化式の解法>

問  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$  で定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

①<類推して求める>  $\{a_n\}: 1, 3, 7, 15, 31, \dots$

階差数列  $\{b_n\}: 2, 4, 8, 16, \dots$

階差数列  $\{b_n\}$  は、初項 2、公比 2 の等比数列となるから、 $b_n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n$

よって、 $n \geq 2$  のとき、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k =$

これは、 $n=1$  のときも成り立つ。よって、 $a_n =$   答

※ この解法では、類推にすぎないので減点されてもしかたがない!

②<階差数列  $\{b_n\}$  を一般的に求める>

与えられた漸化式において、 $n \rightarrow n+1$  とおくと、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1,$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{ 辺々引くと, } \text{  } \dots \text{ (i)}$$

階差数列の定義である  $b_n = a_{n+1} - a_n$  より、 $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$  だから、

(i)より、 $b_{n+1} = 2b_n$  となり、数列  $\{b_n\}$  は、公比が 2 の等比数列であることがわかる。

初項は、 $b_1 = a_2 - a_1 = 2$  より、 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$  (このあと、①と同様に解けるが...)

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (2a_n + 1) - a_n = a_n + 1, \text{ } b_n = 2^n \text{ より, } a_n = \text{  } \text{ 答}$$

↑  
問題に与えられた漸化式より

※ もっと、簡単に解くのが次の解法である。

③< $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$  の形に変形する> : 新しく別の数列を作る!

与えられた漸化式を変形すると、

$$\text{  } : a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) \text{ とおくと, } a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

となるから、数列  $\{a_n + 1\}$  は、初項  $a_1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列である。

よって、 $a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$  ゆえに、 $a_n =$   答

つまり、 $\{a_n\}: 1, 3, 7, 15, 31, \dots$  に 1 ずつたした数列を考えると、

$\{a_n + 1\}: 2, 4, 8, 16, 32, \dots$  となり、等比数列になる。

したがって、 $a_{n+1} = pa_n + q$  ( $p, q$  は定数、 $p \neq 1$ ) の形の数列は、定数を足し引きして、少しずつらすことにより、必ず公比が  $p$  の等比数列にできる。

$a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$  や  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{2+a_n}$  の形の少し複雑な漸化式も、工夫することにより、

$a_{n+1} = pa_n + q$  ( $p, q$  は定数、 $p \neq 1$ ) の形に帰着できるのである。

この形に帰着できない漸化式のときは、①のように、類推によって、一般項を求めた後、**数学的帰納法**で証明すれば減点されることはない。

## <漸化式の解法>

次の条件によって定まる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$$(1) a_1=2, a_{n+1}=3a_n-2 \qquad (2) a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+2$$

解説

$$(1) \text{ 漸化式を変形すると } a_{n+1}-1=3(a_n-1) \quad \Leftarrow \quad c=3c-2 \text{ を満たす } c=1$$

↑これは答案に書かない!

$$a_n-1=b_n \text{ とおくと } b_{n+1}=3b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比 3 の等比数列で、初項は  $b_1=a_1-1=2-1=1$

$$\text{ゆえに、数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n=1 \cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$$

$$\text{したがって } a_n=b_n+1=3^{n-1}+1$$

$$(2) \text{ 漸化式を変形すると } a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3) \quad \Leftarrow \quad c=\frac{c}{3}+2 \text{ を満たす } c=3$$

↑これは答案に書かない!

$$a_n-3=b_n \text{ とおくと } b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比  $\frac{1}{3}$  の等比数列で、初項は  $b_1=a_1-3=1-3=-2$

$$\text{ゆえに、数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n=-2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{2}{3^{n-1}}$$

$$\text{したがって } a_n=3+b_n=3-\frac{2}{3^{n-1}}$$

問  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$  で定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

**③  $\langle a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$  の形に変形する  $\rangle$  : 新しく別の数列を作る!**

与えられた漸化式を変形すると、

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1) \quad : \quad a_n+1=c_n \text{ とおくと, } a_{n+1}+1=c_{n+1}$$

となるから、数列  $\{a_n+1\}$  は、初項  $a_1+1=2$ 、公比 2 の等比数列である。

$$\text{よって, } a_n+1=2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{ゆえに, } a_n=2^n-1 \quad \text{答}$$

つまり、 $\{a_n\} : 1, 3, 7, 15, 31, \dots$  に 1 ずつたした数列を考えると、

$$\{a_n+1\} : 2, 4, 8, 16, 32, \dots \text{ となり, 等比数列になる。}$$

したがって、 $a_{n+1}=pa_n+q$  ( $p, q$  は定数、 $p \neq 1$ ) の形の数列は、定数を足し引きして、少しずつらすことにより、必ず公比が  $p$  の等比数列にできる。

## <漸化式の解法>

### ※漸化式の解法パターン編

$$\textcircled{1} \quad a_{n+1} = a_n + f(n)$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $a_{n+1} - a_n = f(n) \rightarrow$  公式  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) (n \geq 2)$  を利用する.

例1 :  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$       例2 :  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n^2$

$$\textcircled{2} \quad a_{n+1} = p a_n + q (p \neq 1) \quad : p=1 \text{ の場合は}\textcircled{1}$$

特性方程式  $\alpha = p\alpha + q$  を満たす  $\alpha$  を用いて,  $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$  の形に変形する.

例 :  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$

$$\textcircled{3} \quad a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$$

2次方程式  $x^2 = px + q$  の解  $\alpha, \beta$  を用いて, 2つの形に変形する.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n), \quad a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

例 :  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

$$\textcircled{4} \quad a_{n+1} = p a_n + f(n) (p \neq 1)$$

漸化式に  $n \rightarrow n+1$  を代入して, 階差数列  $\{b_n\}$  の漸化式をつくと,

②の形に帰着できる.

例 :  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n$

$$\textcircled{5} \quad a_{n+1} = p a_n + q^{n+1} (p \neq 1)$$

両辺を  $q^{n+1}$  で割り,  $\frac{a_n}{q^n} = b_n$  とおいた数列  $\{b_n\}$  の漸化式が②の形に帰着できる.

例 :  $a_1 = 2, a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+1}$

$$\textcircled{6} \quad n a_{n+1} = p(n+1)a_n + q n(n+1)$$

両辺を  $n(n+1)$  で割り,  $\frac{a_n}{n} = b_n$  とおいた数列  $\{b_n\}$  の漸化式が②の形に帰着できる.

例1 :  $a_1 = 1, n a_{n+1} = 2(n+1)a_n + n(n+1)$

例2 :  $a_1 = 1, n a_{n+1} = (n+1)a_n + 2$

$$\textcircled{7} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p a_n + q}$$

両辺の逆数を取り,  $\frac{1}{a_n} = b_n$  とおいた数列  $\{b_n\}$  の漸化式が②の形に帰着できる.

例 :  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$

$$\textcircled{8} \quad a_{n+1} = \frac{r a_n + s}{p a_n + q}$$

$a_n - \alpha = b_n$  において⑦の形に帰着できるように, 分子を  $b_n$  の定数倍だけにする.

例 :  $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$