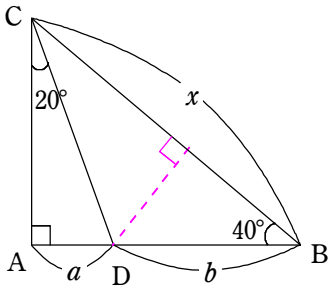


<三角形の問題>

1 下図のような三角形 ABC において、 x の長さを a , b を用いて表せ。



解答 $AC=y$ とおくと、 $x^2 = y^2 + (a+b)^2 \dots$ ①

I) 図より、 $\sin 40^\circ = \frac{y}{x}$, $\sin 20^\circ = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$,

$\cos 20^\circ = \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}$ 二倍角の公式 $\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$

に代入して、 $\frac{y}{x} = 2 \times \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} \times \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}$

整理すると、 $2ax = y^2 + a^2$, ①を代入して、 $2ax = x^2 - (a+b)^2 + a^2$

$x^2 - 2ax - 2ab - b^2 = 0$ $(x+b)(x-2a-b) = 0$ $x > 0$ より、 $x = 2a + b$

II) 図より、 $\cos 40^\circ = \frac{a+b}{x}$, $\sin 20^\circ = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$, 二倍角の公式 $\cos 40^\circ = 1 - 2\sin^2 20^\circ$

に代入して、 $\frac{a+b}{x} = 1 - 2\frac{a^2}{y^2 + a^2}$ $x(y^2 - a^2) = (a+b)(y^2 + a^2)$ ①を代入して整理すると、

$x^3 - (a+b)x^2 - (2a^2 + 2ab + b^2)x + b(a+b)(2a+b) = 0$ 因数分解すると、

$(x-2a-b)(x-b)(x+a+b) = 0$ $x > 0$, $x \neq b$ より、 $x = 2a + b$

III) 図より、 $\tan 20^\circ = \frac{a}{y}$, $\tan 40^\circ = \frac{y}{a+b}$, 二倍角の公式 $\tan 40^\circ = \frac{2\tan 20^\circ}{1 - \tan^2 20^\circ}$

に代入すると、 $\frac{y}{a+b} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{y}\right)^2 \right\} = 2 \times \frac{a}{y}$ $y^2 - a^2 = 2a(a+b)$ ①を代入して、

$x^2 - (4a^2 + 4ab + b^2) = 0$ $x^2 - (2a+b)^2 = 0$ $x > 0$ より、 $x = 2a + b$

別解 ? $x : b = y : \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{2}$ $x\sqrt{y^2 + a^2} = 2by$ $x^2(y^2 + a^2) = 4b^2y^2$

①を代入して整理すると、 $x^2\{x^2 - (2ab + b^2)\} = 4b^2\{x^2 - (a+b)^2\}$

$x^4 - (2ab + 5b^2)x^2 + 4b^2(a+b)^2 = 0$???

<幾何学的解法>

