数Ⅰ　解の存在範囲　補充プリント

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　)

1 放物線 $y=x^2+ax+2$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ．

(1) x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わる．

(2) x 軸の $x<-1$ の部分と異なる 2 点で交わる．

(解説)

$f(x)=x^2+ax+2$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2}$ である．

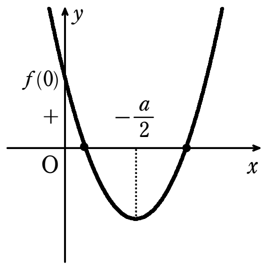
(1) 放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$a^2-4\cdot1\cdot2>0$　　……①

軸について　$-\dfrac{a}{2}>0$　……②

$f(0)=2>0$　　……③

の 3 つが同時に成り立つことである．



①から　　$a^2-8>0$

すなわち　　$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})>0$

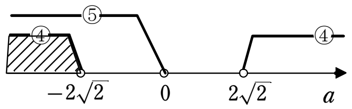
ゆえに　　$a<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<a$　……④

②から　　$a<0$　……⑤

③は常に成り立つ．

よって，④，⑤の共通範囲を求めて

$a<-2\sqrt{2}$



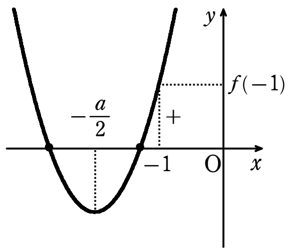
(2) 放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $x<-1$ の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$a^2-4\cdot1\cdot2>0$　　……①

軸について　$-\dfrac{a}{2}<-1$　……②

$f(-1)=1-a+2>0$　　……③

の 3 つが同時に成り立つことである．



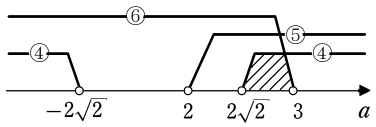
①から　　$a<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<a$　……④

②から　　$a>2$　……⑤

③から　　$a<3$　……⑥

よって，④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$2\sqrt{2}<a<3$



2 放物線 $y=x^2-2mx+m+2$ が x 軸の $x>1$ の部分と異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ．

(解説)

$y=x^2-2mx+m+2=(x-m)^2-m^2+m+2$ から，軸の方程式は　$x=m$

この放物線が x 軸の $x>1$ の部分と異なる 2 点で交わるための条件は，

次の [1]〜[3] が同時に成り立つことである．

[1] x 軸と異なる 2 点で交わる

$(-m)^2-(m+2)>0$

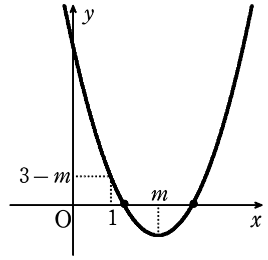
ゆえに　　$m<-1$，$2<m$　……①

[2] 軸 $x=m$ について　$m>1$　……②

[3] $x=1$ のときの y の値は正

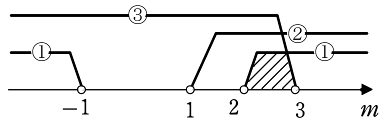
$1^2-2m\cdot1+m+2>0$

ゆえに　　$m<3$　……③



①〜③の共通範囲を数直線を書いて求めると，

$2<m<3$　(答)



3 次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を，それぞれ求めよ．

(1) 2 次方程式 $2x^2-3x+a=0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にある．

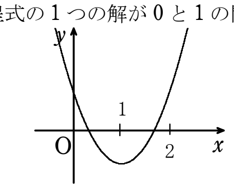
(2) 2 次方程式 $2ax^2-(a+2)x-5=0$ の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にある．ただし，$a>0$ とする．

(解説)

(1) $f(x)=2x^2-3x+a$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にあるための条件は

$f(0)>0$　かつ　$f(1)<0$　かつ　$f(2)>0$



$f(0)>0$ から　　$a>0$　……①

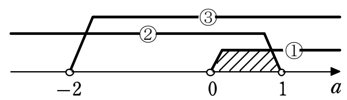
$f(1)<0$ から　　$-1+a<0$

ゆえに　　$a<1$　……②

$f(2)>0$ から　　$2+a>0$

ゆえに　　$a>-2$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて　　$0<a<1$

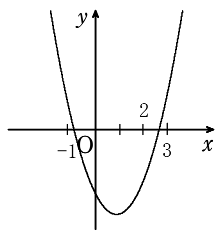


(2) $f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ とおく．

$a>0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，$f(0)=-5<0$ である．

よって，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるための条件は

$f(-1)>0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$



$f(-1)>0$ から　$3a-3>0$

ゆえに　　$a>1$　……①

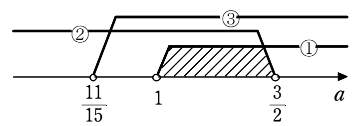
$f(2)<0$ から　　$6a-9<0$

ゆえに　　$a<\dfrac{3}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　　$15a-11>0$

ゆえに　　$a>\dfrac{11}{15}$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて　　$1<a<\dfrac{3}{2}$

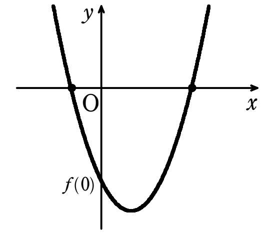


4 放物線 $y=x^2+2(a-1)x+3-a^2$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(解説)

$f(x)=x^2+2(a-1)x+3-a^2$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるための条件は，放物線が y 軸の負の部分と交わることである．



したがって　　$f(0)<0$　すなわち　$3-a^2<0$

よって　$a^2-3>0$　ゆえに　$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

したがって　$a<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<a$

注意　$f(0)<0$ でありさえすれば(グラフが下に凸より)，必ず x 軸とは 2 点で交わるので，$f(0)<0$ のみの条件でよく，判別式 $D>0$ の条件は不要！

5 次の条件を満たすような，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1) x のすべての値に対して $x^2+mx+3>0$ が成り立つ．

(2) 2 次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq0$ が解をもつ．

(解説)

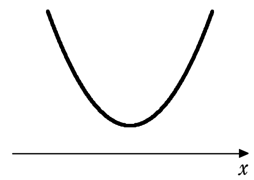
(1) 与えられた条件は，$y=x^2+mx+3$ のグラフが x 軸より上方にあることと同じである．

グラフは下に凸だから，係数について

$m^2-4\cdot1\cdot3<0$　となればよい．

すなわち　　$(m+2\sqrt{3})(m-2\sqrt{3})<0$

ゆえに　　$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$



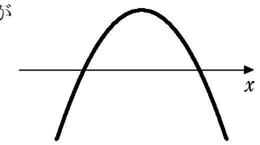
(2) 与えられた条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことと同じである．

グラフは上に凸だから，係数について

$(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq0$　となればよい．

すなわち　　$4m(m+1)\geqq0$

ゆえに　　$m\leqq-1$，$0\leqq m$



別解 与式より，$x^2-2mx-m\leqq0$ が解をもてばよいから，$y=x^2-2mx-m$ とおくと，$y=(x-m)^2-m^2-m$ の頂点の y 座標について $-m^2-m\leqq0$ となればよい．

6 不等式 $(a-1)x+a+1>-(x+1)^2$ が，どのような x の値に対しても成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(解説)

不等式を整理すると　　$x^2+(a+1)x+a+2>0$

これがどのような x の値に対しても成り立つための条件は

不等式の左辺の x^2 の係数は正だから　$(a+1)^2-4\cdot1\cdot(a+2)<0$

となることである．

整理すると　　$a^2-2a-7<0$　　$a^2-2a-7=0$ を解くと　　$a=1\pm2\sqrt{2}$

よって，a の値の範囲は　　$1-2\sqrt{2}<a<1+2\sqrt{2}$